MATHEMATIK K1

F. LEMMERMEYER

Wir gehen noch einmal die verschiedenen Möglichkeiten zur Lösung von linearen Gleichungssystemen durch.

LGS mit zwei Unbekannten

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & = & 1. \end{array}$$

Geometrisch beschreiben die Gleichungen zwei Geraden: Schreibt man $x_1 = x$ und $x_2 = y$, so ist die erste Gleichung $3x + 4y = 1$ äquivalent mit $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, die zweite Gleichung $5x + 7y = -1$ mit $y = -\frac{5}{7}x + \frac{1}{7}$.

Zwei Geraden sind entweder parallel oder sie besitzen genau einen Schnittpunkt. Weil die beiden hier gegebenen Geraden nicht parallel sind, muss es genau eine Lösung geben. Diese kann man natürlich durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen erhalten; leichter ist es, bei den Ausgangsgleichungen (ohne Brüche) zu bleiben.

Ziel wird es sein, aus den beiden Gleichungen eine Unbekannte zu eliminieren. Um x_1 aus den Gleichungen zu entfernen, multiplizieren wir die erste Gleichung mit 5, die zweite mit 3, und subtrahieren sie voneinander. Dies liefert

$$\begin{array}{rcrcr} 15x_1 & + & 20x_2 & = & 5, \\ 15x_1 & + & 21x_2 & = & 3, \end{array}$$

also nach Subtraktion (untere minus obere) $x_2 = -2$. Setzt man dies in eine der beiden Gleichungen ein, folgt $x_1 = 3$.

Die Lösung des LGS ist also $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Geometrisch schneiden sich die beiden Geraden im Punkt $(3|-2)$.

Eine zweite Möglichkeit, die sich im Falle von zwei Unbekannten aber kaum von der ersten unterscheidet, benutzt das Skalarprodukt von Vektoren. Dazu schreibt man das LGS in Vektorform:

$$x_1\binom{3}{5} + x_2\binom{4}{7} = \binom{1}{1}.$$

Wir wollen die Gleichung so mit einem Vektor multiplizieren, dass x_1 wegfällt. Dazu besorgen wir uns einen Vektor, der auf $\vec{a} = \binom{3}{5}$ senkrecht steht, etwa $\vec{a}_\perp = \binom{5}{-3}$ (im Allgemeinen steht der Vektor $\vec{a} = \binom{r}{s}$ senkrecht auf $\vec{a}_\perp = \binom{s}{-r}$, weil deren Skalarprodukt verschwindet). Jetzt berechnen wir

$$x_1\binom{3}{5} + x_2\binom{4}{7} = \binom{1}{1} \quad \Big| \cdot \binom{5}{-3}.$$

Dies liefert

$$x_1\binom{3}{5} \cdot \binom{5}{-3} + x_2\binom{4}{7} \cdot \binom{5}{-3} = \binom{1}{1} \cdot \binom{5}{-3},$$

also

$$x_1(3 \cdot 5 - 5 \cdot 3) + x_2(5 \cdot 4 - 3 \cdot 7) = 5 - 3$$

und damit wie oben $x_2 = -2$. Wenn man genau hinschaut, wird man feststellen, dass die Rechnungen im Wesentlichen identisch waren.

Übungen.

(1) Löse das LGS

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

(2) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden $g : 2x+3y = 4$ und $h : y = 2x - 1$.

(3) Schreibe $\vec{c} = \binom{-2}{5}$ als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a} = \binom{1}{-1}$ und $\vec{b} = \binom{2}{-3}$.

Eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist dabei ein Ausdruck der Form $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$. Im vorliegenden Fall ist also die Gleichung

$$\binom{-2}{5} = r\binom{1}{-1} + s\binom{2}{-3}$$

zu lösen.

(4) Eine Normalparabel $y = x^2 + bx + c$ geht durch die beiden Punkte $P(1|-1)$ und $Q(3|1)$.

Einsetzen der Punkte liefert ein LGS in den beiden Unbekannten b und c.

LGS mit drei Unbekannten

Gegeben sei das LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Auch hier geben wir zwei verschiedene Lösungsmethoden an.

Gauß-Verfahren (Stufenform). Die Idee ist, das LGS auf Stufenform zu bringen, also in ein LGS zu verwandeln, in welchem z.B. die zweite Gleichung nur noch x_2 und x_3, und die dritte nur noch x_3 enthält. Dazu ist es ratsam, dass der Koeffizient von x_1 links oben 1 ist. Dies erreichen wir durch Vertauschen der ersten und zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 && \text{(I)} \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 && \text{(II)} \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2. && \text{(III)} \end{aligned}$$

Jetzt ersetzen wir (II) durch (II) - 2(I) und (III) durch (III) + (I):

$$\begin{array}{rcrcrcrr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & \text{(I)} \\ & - & 5x_2 & - & 9x_3 & = & -1 & \text{(IV)} \\ & & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 & \text{(V)} \end{array}$$

Jetzt müssen wir den Koeffizienten 3 von x_2 in (IV) zum Verschwinden bringen. Dazu können wir nicht (I) benutzen, weil wir sonst die 0 vor x_1 wieder kaputtmachen. Wir müssen also 5(V) + 3(IV) rechnen:

$$\begin{array}{rcrcrcrr} x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 & \text{(I)} \\ & - & 5x_2 & - & 9x_3 & = & -1 & \text{(IV)} \\ & & & - & 7x_3 & = & 7 & \text{(VI)} \end{array}$$

Jetzt finden wir $x_3 = -1$; Einsetzen in (IV) liefert $x_2 = 2$, und (I) gibt uns dann $x_1 = 3$.

Geometrisch beschreiben die drei Gleichungen Ebenen im Raum; hier kann es, wie eben, eine eindeutige Lösung geben: im vorliegenden Fall ist $(3|2|-1)$ der Schnittpunkt der drei Ebenen. Es kann aber auch gar keine Lösung existieren (wenn z.B. zwei Ebenen echt parallel sind), und es kann sein, dass alle drei Ebenen durch eine gemeinsame Gerade gehen: in diesem Fall ist die Lösungsmenge eine Gerade – aber dazu kommen wir noch.

Lösung mit Skalarprodukt. Auch im Falle von drei Unbekannten kann man das LGS in Vektorform schreiben:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Um beispielsweise x_2 und x_3 loszuwerden, müssen wir diese Gleichung mit einem Vektor multiplizieren, der auf $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ senkrecht steht. Einen solchen Vektor bestimmen wir mit dem Kreuzprodukt der beiden Vektoren:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix}$$

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung (1) skalar mit diesem Vektor und finden:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix}$$

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-11\\-1\\-16\end{pmatrix}$$

$$x_1(-22 - 1 + 16) + 0x_2 + 0x_3 = 11 - 32$$

also $-7x_1 = -21$ und damit $x_1 = 3$ wie oben. Der Vorteil bei diesem Verfahren liegt darin, dass man seine Rechenfehler bereits zu Beginn erkennt, weil etwa der Koeffizient von x_2 oder x_3 nicht 0 wird.

Jetzt kann man entweder einsetzen und das LGS mit zwei Unbekannten lösen, oder man macht das gleiche Spielchen mit x_1 und x_3, d.h. man multipliziert das LGS mit

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\9\end{pmatrix};$$

dies liefert $x_2(-12+1+18) = -4+18$, also $7x_2 = 14$ und damit $x_2 = 2$. Der Rest ist nun ein Kinderspiel.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben kann man auf dieser Seite kontrollieren.

Übungen.

(1) Löse das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 15 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 26 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$.

(2) Löse das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & -5 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = \frac{7}{10}$, $x_2 = -\frac{21}{10}$, $x_3 = \frac{23}{10}$.

(3) Schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: $7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(4) Bestimme die Gleichung der Parabel durch die Punkte $P(1|2)$, $Q(2|1)$ und $R(-2|-7)$.

Lösung: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.