MATHEMATIK K1

16.10.2018

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte (max)	9	3	5	4	2	6	1
Punkte							

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $f(x) = 0{,}75x^4 + \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{1}{3}$

b) $g(x) = \dfrac{2x}{7} - \dfrac{7}{2x} + \sqrt{7}$

c) $k(x) = (1 - 2x)^2$

d) $p(x) = 5\sin(x) - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Berechnen Sie weiter $k'(\frac{1}{3})$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$x^5 + x^3 = 6x.$$

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds von f.

(4) Gegeben ist die Gleichung

$$f(x) = x^2 + ax - 15$$

einer Parabel.

a) Ermitteln Sie den Wert von a so, dass der Punkt $P(1|-12)$ auf der Parabel liegt.

b) Bestimmen Sie (mit diesem Wert von a) die Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild von f im Punkt $Q(3|f(3))$.

(5) Geben Sie eine Vektorgleichung der Geraden $y = 2x - 1$ in Parameterform an.

(6) Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-1)$ und $B(-2|5|1)$.

a) Geben Sie den Mittelpunkt von A und B an, so wie einen weiteren Punkt, der zwischen A und B liegt.

b) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC mit $C(5|4|-1)$ zu einem Rechteck ergänzen kann, und geben Sie die Länge der Diagonale des Rechtecks an.

c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden durch C an, die senkrecht auf die Gerade durch AB steht.

(7) Begründen Sie, dass das Schaubild der Funktion

$$f(x) = x^3 - x - 6$$

eine ganzzahlige Nullstelle zwischen $x = 0$ und $x = 3$ besitzt.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a)
$$f(x) = 0{,}75x^4 + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{3}$$
$$f'(x) = 3x^3 + \frac{3x}{2}$$

b)
$$g(x) = \frac{2x}{7} - \frac{7}{2x} + \sqrt{7}$$
$$g'(x) = \frac{2}{7} + \frac{7}{2x^2}$$

c)
$$k(x) = (1-2x)^2$$
$$k'(x) = 2(1-2x)\cdot(-2) = -4(1-2x) = -4+8x$$

d)
$$p(x) = 5\sin(x) - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$p'(x) = 5\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{x}^3}$$

Weiter ist $k'(\frac{1}{3}) = -4 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$.

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{aligned} x^5 + x^3 &= 6x && \Big|\ -6x \\ x^5 + x^3 - 6x &= 0 \\ x(x^4 + x^2 - 6) &= 0 && \Big|\ \text{Vieta} \\ x(x^2+3)(x^2-2) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_1 = 0$; die gleichung $x^2 + 3 = 0$ hat keine Lösungen, die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ liefert $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

(3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}.$$

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$$
$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2}$$
$$f''(x) = 2 - \frac{4}{x^3}$$

Nullstellen: $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{x} &= 0 && \Big| \cdot x \\ x^3 - 2 &= 0 && \Big| + 2 \\ x^3 &= 2 && \Big| \sqrt[3]{} \\ x_1 &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x^2} &= 0 && \Big| \cdot x^2 \\ 2x^3 + 2 &= 0 && \Big| : 2 \\ x^3 + 1 &= 0 && \Big| - 1 \\ x^3 &= -1 && \Big| \sqrt[3]{} \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt folgt $f(-1) = 1 + 2 = 3$; weiter ist $f''(-1) = 2 + 4 > 0$, also liegt ein Tiefpunkt vor: $T(-1|3)$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{x^3} &= 0 && \Big| \cdot x^3 \\ 2x^3 - 4 &= 0 && \Big| + 4 \\ 2x^3 &= 4 && \Big| : 2 \\ x^3 &= 2 && \Big| \sqrt[3]{}\ x_3 \qquad = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Also ist der Wendepunkt gleich der Nullstelle $W(\sqrt[3]{2}|0)$.

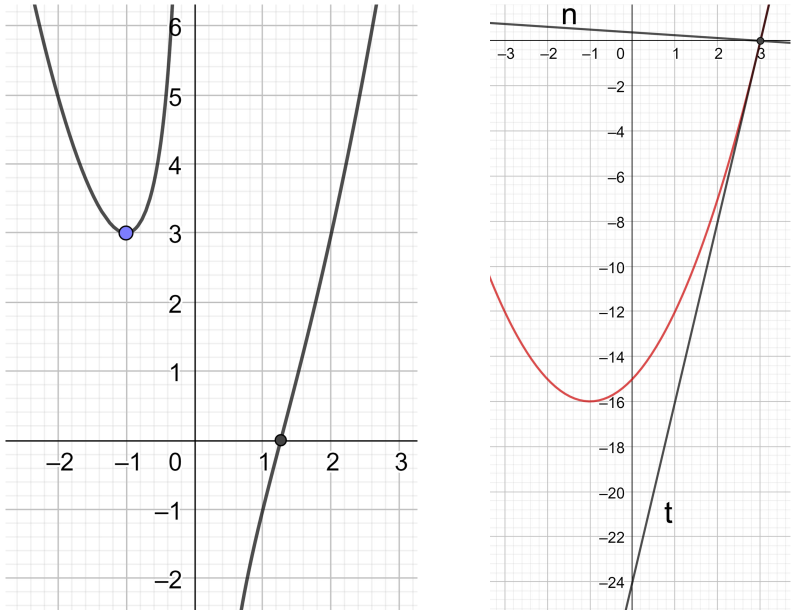

Abbildung 1. Schaubild Aufgabe 3 und Aufgabe 4

(4) a) Einsetzen ergibt $-12 = 1 + a - 15$, also $a = 2$.

b) $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $f'(x) = 2x + 2$, $f(3) = 0$, $m = f'(3) = 8$, also $b = -24$ nach Einsetzen in $y = mx + b$ und damit $t: \ y = 8x - 24$.

Weiter ist $m' = -\frac{1}{8}$, und damit erhält man $n: \ y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$.

(5) Wir brauchen zwei Punkte auf der Geraden. Wertetabelle:

x	0	1
y	-1	1

also ist $P(0|-1)$ und $Q(1|1)$, sowie

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(6) a) $M_{AB}(0|3|0)$; als weiteren Punkt kann man den Mittelpunkt von M_{AB} und A wählen, also $N(1|2|-\frac{1}{2})$.

b) Zu zeigen ist, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{18}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{54}$. Wegen $54 = 36 + 18$ ist das Dreieck rechtwinklig in A.

Die Länge der Diagonalen ist $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{18}$.

c) Gerade durch AC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(7) Wegen $f(0) = -6 < 0$ und $f(3) = 27 - 3 - 6 > 0$ besitzt f einen Vorzeichenwechsel. Weil f eine ganzrationale Funktion ist, muss sie also dazwischen eine Nullstelle haben.

Weil man weiß, dass die Nullstelle ganzzahlig ist, reicht es, $f(2) = 8 - 2 - 6 = 0$ auszurechnen.