K1 MATHEMATIK

09.02.2020

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2x} - x.$$

(2) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = \sqrt{8x} - \frac{2}{x-1}$$

mit $F(2) = 20$.

(3) Lösen Sie die Gleichung

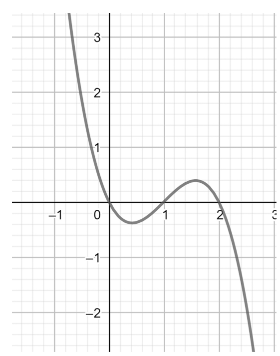
$$(\sin(2x))^2 = 3\sin(2x)$$

für $0 \leq x \leq \pi$.

(4) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f, der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.

a) Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat.

b) Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an.



c) Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind:

(1) $f'(0) < f'(1)$.

(2) $f''(0) > 0$.

A.1 Analysis

Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 20$$

beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von K für $0 \le x \le 9$.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Schaubilds die Produktionsmenge, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

Geben Sie das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

b) Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn 4 Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

Zeichnen Sie das Schaubild von E in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Bestimmen Sie anhand der Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

c) Ermitteln Sie anhand der Skizze, wieviel Euro pro Kubikmeter die Firma mindestens verlangen muss, damit sie noch Gewinn machen kann. Erklären Sie Ihr Vorgehen.

A.2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ für $x \neq 0$.

a) Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0|p)$ geht, schneidet den Graphen G_f von f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p.

b) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q.

c) Welche Punkte auf dem Schaubild von f haben den kleinsten Abstand vom Ursprung?

Hinweise

(1) Quotientenregel oder $f(x) = 0{,}5x^{-1}\sin(2x) - x$.

(2) Klammer um $8x$; Kontrolle durch Ableiten.

(3) Alles auf eine Seite, Ausklammern. Dann Substitution $2x = z$.

(4) b) Wie viele Schnittpunkte gibt es für Geraden mit Steigung $m = 1$, $m < 1$ und $m > 1$? Skizze!

c) Die zweite Ableitung gibt an, ob das Schaubild an der betreffenden Stelle nach oben gekrümmt ist (f'' positiv) oder nach unten gekrümmt ist (f'' negativ).

Analysis

a) Monotonieverhalten: Die Ableitung K' beschreibt eine Parabel, hat keine Nullstellen, und es ist $K'(0) = 50 > 0$. Was folgt daraus für K'? (A: überall positiv) Was bedeutet dies für die Monotonie von K?

b) $G(4)$ ausrechnen.

Wo liegt das Schaubild von E oberhlab von K?

Maximaler Gewinn: $G'(x) = 0$ (A: $x \approx 6{,}65$)

c) Statt $E(x) = 23x$ muss man jetzt $E(x) = mx$ betrachten. Wie klein darf man m machen, bis der Erlös unterhalb der Kosten liegt? Zeichnerische Lösung ($m \approx 17{,}5$) reicht.

A.2. a) Waagrechter Abstand soll 1 sein; Schaubild ist achsensymmetrisch (Skizze!). Was bedeutet das für die x-Koordinaten der Schnittpunkte? (A: $p = 16$)

b) Wenn das Dreieck gleichschenklig ist, müssen x- und y-Achsenabschnitte gleich sein. Welche Steigung muss die Tangente dann haben?

c) Abstandsfunktion hinschreiben; Ableitung gleich 0 setzen.

Lösungen

Pflichtteil

(1) Ableiten mit Quotientenregel $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ ergibt

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x)\cdot 2x - \sin(2x)\cdot 2}{4x^2} - 1 = \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{2x^2} - 1.$$

Ableiten von $f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-1}\sin(2x) - x$ mit Produktregel liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cdot x^{-1}\cos(2x)\cdot 2 - 1 = -\frac{\sin(2x)}{2x^2} + \frac{\cos(2x)}{x} - 1.$$

Dritte Möglichkeit: $f(x) = (2x)^{-1}\cdot\sin(2x)$.

(2) Wegen $f(x) = (8x)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{x-1}$ ist $F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(8x)^{\frac{3}{2}} - 2\ln(x-1) + c = \frac{1}{12}\sqrt{8x}^3 - 2\ln(x-1) + c$. Aus $F(2) = 20$ ergibt sich $c = \frac{44}{3}$.

(3) Standardverfahren:

$$\begin{aligned} (\sin(2x))^2 &= 3\sin(2x) && \big|\; -3\sin(2x) \\ (\sin(2x))^2 - 3\sin(2x) &= 0 \\ \sin(2x)\cdot(\sin(2x) - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt: $\sin(2x) = 0$ oder $\sin(2x) = 3$. Die zweite Gleichung hat keine Lösung; in der ersten substitutieren wir $2x = z$; aus $\sin(z) = 0$ erhält man $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$ und $z_3 = 2\pi$, also $2x = 0$, $2x = \pi$ und $2x = 2\pi$, folglich $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$.

(4) a) Man rechnet $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$ und $m = f'(1) = 1$.

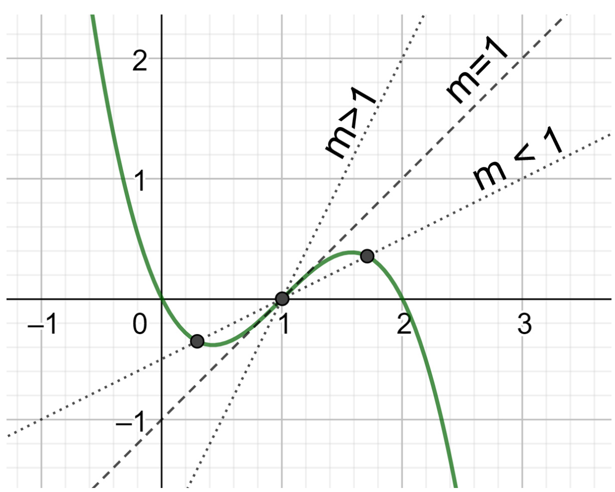


Abbildung 1. Wendetangente ($m = 1$) und Geraden durch $W(1|0)$ mit Steigung $m > 1$ (1 Schnittpunkt mit f) und $m < 1$ (3 Schnittpunkte mit f).

Die Geraden mit Steigung $m \geq 1$ haben genau einen Schnittpunkt mit dem Schaubild, diejenigen mit $0 < m < 1$ dagegen drei; dies liest man an der Skizze in Abb. 1 ab.

c) Nachrechnen oder:

(1) f fällt in $x = 0$ (also $f'(0) < 0$) und hat Steigung $f'(1) = 1$ in $x = 1$, also ist die Aussage wahr.

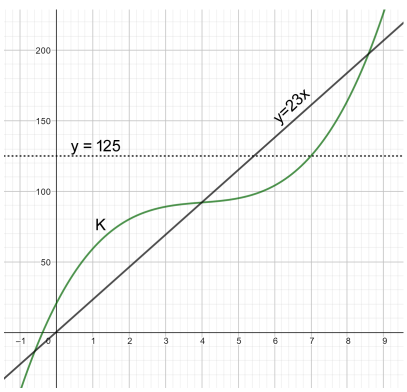
(2) $f''(0)$ ist positiv, weil das Schaubild dort eine Linkskurve beschreibt.

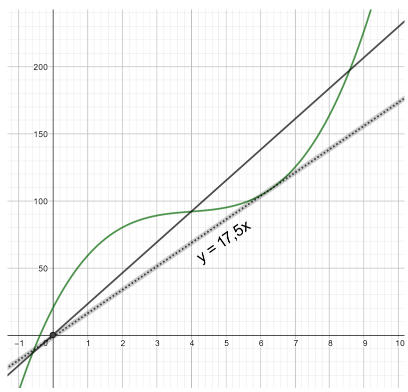
Analysis

Wegen $K(7) = 125$ kostet die Herstellung von 7 m^3 Flüssigkeit 125.000 Euro.

Wegen $G(4) = E(4) - K(4) = 0$ macht das Unternehmen bei der Herrstellung und Verkauf von 4 m^3 Flüssigkeit keinen Gewinn.

Die Funktion K ist streng monoton wachsend: je mehr Kubikmeter hergestellt werden, desto höher die Kosten.





Gewinnbereich: Erlös muss oberhalb der Kosten liegen. Das ist zwischen 4 m^3 und etwa 8,6 m^3 der Fall.

Maximaler Gewinn: $G'(x) = 0$ liefert $x \approx 6{,}65$: den maximalen Gewinn erwirtschaftet das Unternehmen bei 6,65 m^3.

c) Der Preis von 23.000 Euro soll verändert werden; statt $E(x) = 23x$ muss man also $E_1(x) = mx$ betrachten. Wenn man die Steigung verringert, wird der Gewinnbereich kleiner. Bei $m \approx 17{,}5$ wird der Gewinnbereich verschwinden (aus dem Schaubild ablesen); also muss der Preis mindestens 17.500 Euro pro Kubikmeter betragen, und man muss dann etwa 6,3 Kubikmeter herstellen.

A.2. a) Gegeben sei eine Funktion f; die Gerade durch $P(0|p)$ parallel zur x-Achse ist natürlich $y = p$. Diese soll das Schaubild von f in zwei Punkten schneiden; die Schnittpunkte erhält man durch Gleichsetzen. Im vorliegenden Fall ist $f(x) = \frac{4}{x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^2} &= p && \Big| \cdot x^2 \\ 4 &= px^2 && \Big| : p \\ \frac{4}{p} &= x^2 && \Big| \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{4}{p}} \end{aligned}$$

Dies sind die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Diese sollen Abstand 1 haben. Weil sie auf gleicher Höhe liegen, ist der Abstand einfach die Differenz der x-Koordinaten; es muss also

$$x_2 - x_1 = 1$$

gelten. Einsetzen liefert

$$\sqrt{\frac{4}{p}} - \left(- \sqrt{\frac{4}{p}} \right) = 1,$$

also

$$2\sqrt{\frac{4}{p}} = 1.$$

Also muss $\sqrt{\frac{4}{p}} = \frac{1}{2}$ und damit $\frac{4}{p} = \frac{1}{4}$ sein, was auf $p = 16$ führt.

Wenn man ein bisschen über die Aufgabe nachdenkt, kommt man mit weniger Rechnung aus. Der waagrechte Abstand ist, egal wie f aussieht, die Differenz der x-Koordinaten der Schnittpunkte. Wegen $f(x) = \frac{4}{x^2}$ ist das Schaubild aber symmetrisch bezüglich der y-Achse, d.h. wenn x_1 die x-Koordinate des einen Schnittpunkts ist, dann ist $x_2 = -x_1$ die des zweiten Schnittpunkts. Damit ist der waagrechte Abstand einfach $2x_1$, wenn x_1 die positive der beiden x-Koordinaten bezeichnet. Dieser Abstand soll 1 sein; also muss $2x_1 = 1$ und damit $x_1 = \frac{1}{2}$ sein, d.h. die beiden Schnittpunkte müssen bei $x = \pm 0{,}5$ liegen (Abb. 2 links).

Wegen $f(0{,}5) = 16$ ist also $p = 16$.

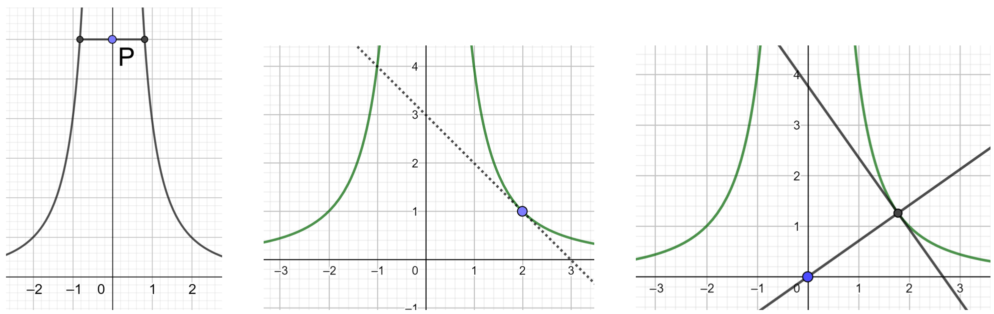


Abbildung 2. $f(x) = \frac{4}{x^2}$ und Punkte mit waagrechtem Abstand 1 (links); Tangente mit gleich langen Achsenabschnitten (Mitte); Punkt mit minimalem Abstand zum Ursprung (rechts)

b) Die Tangente in einem Punkt P des Schaubilds schneidet die x-Achse in $A(x_1|0)$ und die y-Achse in $B(0|y_1)$. Das Dreieck OAB soll gleichschenklig sein; das geht nur, wenn die Strecken OA und OB gleich lang sind, wenn also $x_1 = y_1$ ist. Die Steigung der Geraden durch A und B ist dann

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - y_1}{x_1 - 0} == \frac{-y_1}{x_1} = \frac{-x_1}{x_1} = -1$$

wegen $y_1 = x_1$. Mit anderen Worten: Wenn die x- und y-Achsenabschnitte gleich sein sollen, dann muss die Tangente Steigung -1 haben (siehe Abb. 2 Mitte). $f'(x) = -1$ liefert $x = 2$.

Alternativ: Die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkt $P(u|f(u)$ des Schaubilds von f ist

$$y = f'(u)(x - u) + f(u).$$

Dies kann man auf zwei Arten zeigen.

1. In $x = u$ gilt $m = f'(u)$ und $y = f(u)$; Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $f(u) = f'(u) \cdot u + b$, also $b = f(u) - f'(u)u$ und damit

$$y = f'(u)x + f(u) - f'(u)u = f'(u)(x - u) + f(u),$$

wobei wir $f'(u)$ aus dem ersten und dritten Term ausgeklammert haben.

2. Wir rechnen nach, dass die Gerade mit der Gleichung

$$y = f'(u)(x - u) + f(u)$$

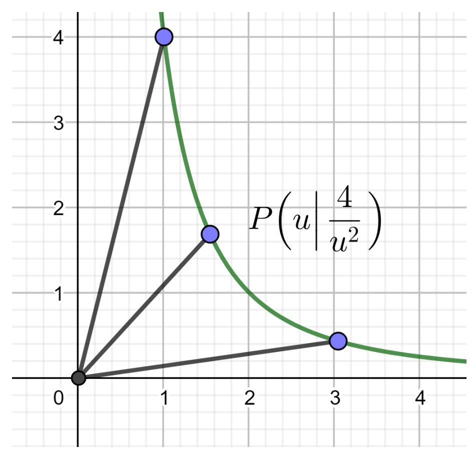
die richtige Steigung hat und durch den Punkt $P(u|f(u))$ geht. Nun hat $y = f'(u)x - uf'(u) + f(u)$ die Steigung $m = f'(u)$ wie gewünscht; zweitens erhält man, wenn man $x = u$ in die Gleichug einsetzt, $y = f(u)$, weil der erste Term $= 0$ wird. Also geht die Gerade durch P.

Im vorliegenden Fall $f(x) = \frac{4}{x^2}$ ist die Gleichung der Tangente durch einen beliebigen Punkt $P(u|f(u))$ des Schaubilds also wegen $m = f'(u) = -\frac{8}{u^3}$ und $f(u) = \frac{4}{u^2}$ gegeben durch

$$y = -\frac{8}{u^3}(x-u) + \frac{4}{u^2} = -\frac{8}{u^3}x + \frac{8u}{u^3} + \frac{4}{u^2} = -\frac{8}{u^3}x + \frac{12}{u^2}.$$

Von dieser Geraden brauchen wir die Schnittpunkte mit den Achsen. Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ zu $Y(0|\frac{12}{u^2})$ (die y-Koordinate ist natürlich nichts anderes als der y-Achsenabschnitt); den Schnittpunkt mit der x-Achse erhält man durch Lösen der Gleichung $y = 0$, und dies führt auf $X(\frac{3u}{2}|0)$. Gleichsetzen der Achsenabschnitte liefert $\frac{12}{u^2} = \frac{2}{3u}$, also $u^3 = 8$ und damit $u = 2$.

c) Wir betrachten die Punkte auf dem Schaubild von f und suchen denjenigen Punkt $P(u|f(u))$, der den kleinsten Abstand zum Ursprung hat:



Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P(x_2|y_2)$ ist nach Pythagoras (Steigungsdreieck!)

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im vorliegenden Fall gehte es um den Abstand von $P(u|f(u))$ zum Ursprung $O(0|0)$, und der ist gegeben durch

$$d = \sqrt{u^2 + f(u)^2}.$$

Um das Minimum zu finden, bestimmen wir den Tiefpunkt der Funktion $d(u)$ und setzen die Ableitung gleich 0; das ist für eine beliebige Funktion f

$$d'(u) = \frac{2u + 2f(u)f'(u)}{2\sqrt{u^2 + f(u)^2}} = \frac{u + f(u)f'(u)}{\sqrt{u^2 + f(u)^2}}.$$

Setzt man dies gleich 0 und schafft die Nenner weg, erhält man

$$u + f(u)f'(u) = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man schneller, wenn man sich überlegt, dass d genau dann minimal ist, wenn $D = d^2$ minimal ist. Aus $D'(u) = 0$ ergibt sich dann sofort $2u + 2f(u)f'(u) = 0$.

Im vorliegenden Fall ist $f(u) = \frac{4}{u^2}$; hier erhält man aus $D(u) = u^2 + \frac{16}{u^4}$ die Gleichung $2u - \frac{64}{u^5} = 0$, was auf $u = \sqrt[6]{32}$ führt.

Alternativ: Im Punkt $P(u|f(u))$ mit minimalem Abstand muss die Gerade OP senkrecht auf die Tangente stehen. Es ist also $m = -\frac{1}{f'(u)}$. Auf der andern Seite ist die Steigung der Geraden durch O und P gleich $\frac{f(u)}{u}$. Gleichsetzen ergibt $f(u)f'(u) = -u$, was auf denselben Wert von u führt.