MATHEMATIK K4

28.06.2018

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte (max)	5	2	3	4	3	3	2	7	1
Punkte									

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - \pi\cos(\pi x)$$
$$g(x) = \frac{3x}{2e^{x-1}}$$
$$h(x) = (x - \sin(2x))^3$$

(2) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von

$$f(x) = 4e^{2x-3} + \frac{1}{x-1}$$

mit $F(2) = 1$.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{x^3-1}{x+1} = x - 1.$$

(4) Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + x_3 = -9$ liegt.

Bestimmen Sie weiter eine Gleichung einer Geraden, die ebenfalls in E liegt und g orthogonal schneidet.

(5) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -8 \end{array}$$

(6) Eine Ebene E geht durch die Punkte $A(7|1|0)$ und $B(2|2|1)$ und steht senkrecht auf $F: x_1 + x_2 = 3$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

(7) Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P(-7|4|2)$.

Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch P geht und die Geraden g und h schneidet. Berechnen Sie weiter die Schnittpunkte dieser Geraden mit g und h.

(8) Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $D(0|6|0)$ und $E(0|0|6)$ sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen Eckpunkte.

b) Untersuchen Sie, ob die Raumdiagonalen orthogonal zueinander sind.

c) Auf die obere Seitenfläche wird eine gerade quadratische Pyramide gesetzt, die dieselbe Grundfläche und dasselbe Volumen wie der Würfel besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide.

d) Geben Sie eine Gleichung einer Ebene an, die den Würfel in zwei volumengleiche Teilkörper teilt.

e) Der Pyramide wird ein Quader einbeschrieben, der die Eckpunkte $P(1|1|6)$, $Q(1|5|6)$, $R(5|1|6)$ und $T(5|5|6)$ besitzt. Bestimme den Inhalt der Oberfläche des Quaders.

(9) Geben Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \ln(2) \end{pmatrix}$$

an.

Lösungen

(1) *Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.*

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - \pi\cos(\pi x) \qquad f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2} + \pi^2\sin(\pi x)$$

$$g(x) = \frac{3x}{2e^{x-1}} = \frac{3}{2}xe^{1-x} \qquad g'(x) = \frac{3}{2}e^{1-x} - \frac{3}{2}xe^{1-x}$$

$$h(x) = (x - \sin(2x))^3 \qquad h'(x) = 3(x - \sin(2x))^2 \cdot (1 - 2\cos(2x))$$

(2) *Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von*

$$f(x) = 4e^{2x-3} + \frac{1}{x-1}$$

mit $F(2) = 1$.

$$F(x) = 2e^{2x-3} + \ln(x-1) + c$$

Wegen $1 = F(2) = 4 + \ln(1) + c = 4 + c$ muss $c = -3$ sein.

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{x^3-1}{x+1} = x - 1 \qquad \Big|\cdot(x+1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x+1) = x^2 - 1 \qquad \Big| +1 - x^2 x^3 - x^2 \quad = 0$$

$$x^2(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

(4) *Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E : 2x_1 - x_2 + x_3 = 9$ liegt.*

Bestimmen Sie weiter eine Gleichung einer Geraden, die ebenfalls in E liegt und g orthogonal schneidet.

Schneiden liefert $2(5+t) - (-t) + (-1+3t) = 9$, also $0 = 0$. Folglich liegt die Gerade in der Ebene.

Als Richtungsvektor der gesuchten Geraden nimmt man einen Vektor, der auf den Richtungsvektor von g und den Normalenvektor von E senkrecht steht, also $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Als

Stützvektor kann man den von g nehmen; also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(5) *Lösen Sie das folgende Gleichungssystem.*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -8 \end{array}$$

Skalarmultiplikation der Gleichung $x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ liefert $-16x_1 = -8$, also $x_1 = \frac{1}{2}$. Daraus folgt $x_2 = -1$ und $x_3 = \frac{3}{2}$.

(6) *Eine Ebene E geht durch die Punkte $A(7|1|0)$ und $B(2|2|1)$ und steht senkrecht auf $F : x_1 + x_2 = 3$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.*

Es ist $E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + u\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Umwandeln in Koordinatenform ergibt $E : x_1 - x_2 + 6x_3 = 6$.

(7) *Gegeben sind die Geraden*

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P(-7|4|2)$.

Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch P geht und die Geraden g und h schneidet. Berechnen Sie weiter die Schnittpunkte dieser Geraden mit g und h.

Die Ebene durch P, welche h enthält, ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Umwandeln in Koordinatenform ergibt $E : -x_1 + x_2 + 3x_3 = 17$. Schneiden mit g liefert $t = 1$, also $Q(7|0|8)$. Die gesuchte Gerade ist dann die Gerade durch P und Q, nämlich $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit h erhält man $R()$.

(8) *Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $D(0|6|0)$ und $E(0|0|6)$ sind Eckpunkte eines Würfels.*

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen Eckpunkte,

$C(6|6|0)$, $F(6|0|6)$, $G(6|6|6)$ und $H(0|6|6)$.

b) Untersuchen Sie, ob die Raumdiagonalen orthogonal zueinander sind.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 36$, also $\neq 0$. Die Raumdiagonalen sind nicht orthogonal.

c) Auf die obere Seitenfläche wird eine gerade quadratische Pyramide gesetzt, die dieselbe Grundfläche und dasselbe Volumen wie der Würfel besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide.

Die Höhe muss 3mal so groß sein wie die Kantenlänge, also $(S3|3|24)$.

d) Geben Sie eine Gleichung einer Ebene an, die den Würfel in zwei volumengleiche Teilkörper teilt.

Beispielsweise $x_3 = 3$.

e) Der Pyramide wird ein Quader einbeschrieben, der die Eckpunkte $P(1|1|6)$, $Q(1|5|6)$, $R(5|1|6)$ und $T(5|5|6)$ besitzt. Bestimme den Inhalt der Oberfläche des Quaders.

Schneiden der Geraden durch P und Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $P'(1|1|8)$. Also ist die Höhe des Quaders 2; die Grundfläche ist $G = 4 \cdot 4 = 16$, also hat der Quader Volumen $V = 16 \cdot 2 = 32$ und Oberfläche $O = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 64$.

(9) Geben Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \ln(2) \end{pmatrix}$$

an.

$S(28|6|18)$.