MATHEMATIK K1

26.01.2018

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	a	b	c	d	e	f	g
Punkte (max)	3	4	2	3	3	2	1	2	2	2	1	2	1	2
Punkte														

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

(1) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = 0{,}1x^2 \cdot \cos(3x) + x$$
$$g(x) = \frac{3}{2x^4} + e^{-x}$$

(2) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = 0{,}4x^3 + x + 1$$
$$g(x) = \frac{3}{4x} + \frac{3}{4x^2}$$
$$h(x) = a\sin(2ax) + a^2$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$1 + \frac{6}{x^2} = x^2$$

(4) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 (\sin(\tfrac{\pi}{2}x) - 1)\,dx.$$

(5) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 2x - 1$ eingeschlossen wird.

(6) Bestimmen Sie a so, dass

$$\int_0^3 (ax^2 + 1)\,dx = 30$$

wird.

(7) Geben Sie alle dreistelligen Zahlen an, bei denen das Produkt der Ziffern gleich 6 ist.

Wahlteil Analysis

Die Funktion

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 4t - 36$$

beschreibt die Änderungsrate des Pegelstands der Mosel in Trier für die ersten zehn Tage des Jahres (t in Tagen seit Jahresbeginn; $f(t)$ in cm pro Tag). Zu Jahresbeginn betrug der Pegelstand 3 m.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von $f(t)$ in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie $f(3)$ und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.

c) Zu welchem Zeitpunkt stieg der Pegel am schnellsten?

d) Erläutern Sie, wie man nur mit Hilfe des Schaubilds untersuchen kann, ob das Wasser nach zehn Tagen höher steht als zu Beobachtungsbeginn.

e) Geben Sie einen (integralfreien) Term an, der die Höhe des Pegels zum Zeitpunkt t beschreibt.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schaubilds den Zeitpunkt des niedrigsten Pegelstands. Wie groß ist der Pegelstand zu diesem Zeitpunkt?

g) Ab einem Pegelstand von 6,95 m dürfen auf der Mosel keine Schiffe mehr fahren. Untersuchen Sie, ob während der ersten zehn Tage der Schiffverkehr auf der Mosel eingeschränkt ist.

Lösungen

(1) Bestimmen Sie die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}1x^2 \cdot \cos(3x) + x \\ f'(x) &= 0{,}2x \cdot \cos(3x) - 0{,}3x^2 \cdot \sin(3x) + 1 \\ g(x) &= \frac{3}{2x^4} + e^{-x} = \frac{3}{2}x^{-4} + e^{-x} \\ g'(x) &= -\frac{6}{x^5} - e^{-x} \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}4x^3 + x + 1 \\ F(x) &= 0{,}1x^4 + 0{,}5x^2 + x \\ g(x) &= \frac{3}{4x} + \frac{3}{4x^2} \\ G(x) &= \frac{3}{4}\ln(x) - \frac{3}{4x} \\ h(x) &= a\sin(2ax) + a^2 \\ H(x) &= -\tfrac{1}{2}\cos(2ax) + a^2x \end{aligned}$$

(3) Lösen Sie die Gleichung

$$1 + \frac{6}{x^2} = x^2$$

Nenner weg, alles auf eine Seite:

$$x^4 - x^2 - 6 = 0.$$

Substitution oder Vieta:

$$(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

liefert $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; die Gleichung $x^2 = -2$ hat keine reelle Lösung.

(4) Hier findet man

$$\int_0^1 (\sin(\tfrac{\pi}{2}x) - 1)\,dx = -\tfrac{2}{\pi}\cos(\tfrac{\pi}{2}x) - x\Big|_0^1 = -\tfrac{2}{\pi} \cdot 0 - 1 + \tfrac{2}{\pi}\cos(0) = \tfrac{2}{\pi} - 1.$$

(5) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 2x - 1$ eingeschlossen wird.

Schnittstellen berechnen: $f(x) = g(x)$ führt auf $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Wegen $f(0) = -2$ und $g(0) = 1$ ist g die obere Funktion; die Fläche ist also gleich

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\, dx &= \int_{-1}^{1} [2x - 1 - (x^2 + 2x - 2)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx = -\tfrac{x^3}{3} + x\Big|_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(6) Es ist

$$\int_0^3 (ax^2 + 1)\, dx = \frac{ax^3}{3} + x\Big|_0^3 = 9a + 3 = 30,$$

also $a = 3$.

(7) Geben Sie alle dreistelligen Zahlen an, bei denen das Produkt der Ziffern gleich 6 ist.

Die Zahlen sind

$$116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312, 321,$$

Wahlteil Analysis

Die Funktion

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 4t - 36$$

beschreibt die Änderungsrate des Pegelstands der Mosel in Trier für die ersten zehn Tage des Jahres (t in Tagen seit Jahresbeginn; $f(t)$ in cm pro Tag). Zu Jahresbeginn betrug der Pegelstand 3 m.

a) Skizze in Abb. 1.

b) $f(3) = 30$ bedeutet, dass der Pegel am dritten Tag um 30 cm/d steigt.

c) Der Pegelstand steigt am schnellsten, wenn die Änderungsrate f maximal ist. $f'(t) = 0$ liefert $t \approx 6{,}2$ als einzige positive Lösung. Der Pegelstand steigt also nach 6,2 Tagen am schnellsten.

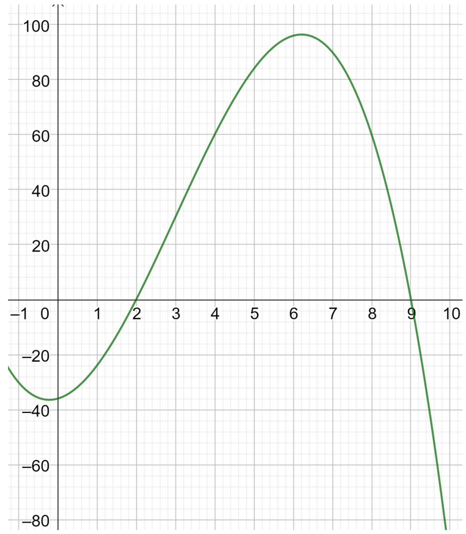

Abbildung 1. Schaubild von f

d) Weil die Fläche unter dem Schaubild von f zwischen $t = 2$ und $t = 9$ größer ist als die beiden Flächen zwischen $t = 0$ und $t = 2$ bzw. zwischen $t = 9$ und $t = 10$, steht das Wasser nach 10 Tagen höher als zu Beginn.

e) Die Höhe des Pegels ist gegeben durch

$$\begin{aligned} h(t) &= h(0) + \int_0^t f(x)\,dx = 300 + \int_0^t (-x^3 + 9x^2 + 4x - 36)\,dx \\ &= 300 - \frac{t^4}{4} + 3t^2 + 2t - 36t. \end{aligned}$$

Andere Möglichkeit: Wir bestimmen die Stammfunktion

$$h(t) = c - \frac{t^4}{4} + 3t^2 + 2t - 36t$$

so, dass $h(0) = 300$ wird. Dies liefert $c = 300$.

f) Der Pegelstand ist nach 2 Tagen am niedrigsten; danach steigt der Pegelstand wieder an bis nach 9 Tagen und sinkt dann wieder etwas. Der Pegelstand nach 2 Tagen ist wegen

$$h(2) = 300 - 44 = 356$$

gleich 3,56 m.

g) Der Pegelstand ist nach 9 Tagen maximal. Wegen $h(9) = 684$ ist der Schiffverkehr uneingeschränkt möglich.