MATHEMATIK K2

09.12.2015

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte (max)	9	3	6	2	9	1
Punkte						

Gesamtpunktzahl	/30
Notenpunkte	

Der GTR ist nur für die Lösung der Textaufgabe (und zur Kontrolle der andern) zugelassen. Der Rechenweg muss ersichtlich sein, und bei der Textaufgabe muss der Ansatz aufgeschrieben werden. Lösungen auf dem Aufgabenblatt werden nicht gewertet!

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen f und berechnen Sie $f'(1)$.

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{1-x} \\ b) & f(x) = 3(1-4x)^5 \\ c) & f(x) = x^2 \sin(\pi x) \\ d) & f(x) = \ln(2x^2-1) \\ e) & f(x) = \sqrt{x^2+16} \\ f) & f(x) = ax^2 + a^2 x + a^3 \end{array}$$

(2) Lösen Sie die Gleichung

$$e^x - 10e^{-x} = 3.$$

(3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2-x)e^x$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Schaubilds von f mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte des Schaubilds von f.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt des Schaubilds von f.

(4) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ streng monoton steigend ist.

Welche Aussage lässt sich daraus über die Anzahl der Extrempunkte folgern?

(5) Der Bestand einer bedrohten Tierart lässt sich näherungsweise durch die Funktion

$$f(t) = 0,1(t+50)(t-100)^2 + 1000$$

beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1900 und $f(t)$ die Anzahl der noch lebenden Tiere.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für die Zeit von 1900 bis in die Gegenwart.

b) Wie viele Tiere lebten 1950? Zeigen Sie, dass es 1973 erstmals weniger als 10 000 Tiere waren.

c) Wann lebten am wenigsten Tiere? Wie viele waren es zu diesem Zeitpunkt?

d) In welchem Zeitraum hat der Bestand um mehr als 600 Tiere pro Jahr abgenommen?

e) Um wie viele Tiere pro Jahr hat der Bestand seit 2000 bis heute durchschnittlich zugenommen?

(6) Zerlege die Zahl 390 so in drei Summanden, dass der zweite Summand dreimal so groß ist wie der erste und der dritte zweieinhalbmal so groß wie der erste.

(1) *Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen f und berechnen Sie $f'(1)$.*

a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{1-x} - \sqrt{x} \cdot e^{1-x}$	$f'(1) = -\dfrac{1}{2}$
b)	$f'(x) = -60(1-4x)^4$	$f'(1) = 4860$
c)	$f'(x) = 2x\sin(\pi x) + \pi x^2 \cos(\pi x)$	$f'(1) = -\pi$
d)	$f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2-1}$	$f'(x) = 4$
e)	$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$	$f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$
f)	$f'(x) = 2ax + a^2$	$f'(1) = 2a + a^2$

(2) *Lösen Sie die Gleichung*

$$e^x - 10e^{-x} = 3.$$

$$\begin{aligned} e^x - \frac{10}{e^x} &= 3 && \Big| \cdot e^x \\ e^{2x} - 10 &= 3e^x && \Big| -3e^x \\ e^{2x} - 3e^x - 10 &= 0 && \Big| \; e^x = z \\ z^2 - 3z - 10 &= 0 && \Big| \text{ Vieta} \\ (z-5)(z+2) &= 0 \end{aligned}$$

- $z_1 = 5$, $e^x = 5$, $x_1 = \ln(5)$;
- $z_2 = -2$, $e^x = -2$, keine Lösung.

(3) *Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2-x)e^x$.*

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Schaubilds von f mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte des Schaubilds von f.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt des Schaubilds von f.

a) Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 2$, also $S(0|2)$.

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$ und Satz vom Nullprodukt liefert wegen $e^x \neq 0$ den einzigen Schnittpunkt $N(2|0)$.

b) Extrempunkte: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = -e^x + 2e^x - xe^x = e^x - xe^x = (1-x)e^x,$$
$$f''(x) = -e^x + (1-x)e^x = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x.$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt wegen $e^x \neq 0$, dass $x = 1$ sein muss.

$y_1 = f(1) = e$; $f''(1) = -e < 0$, also $H(1|e)$.

c) Wendepunkt: $f''(x) = 0$ liefert $x_2 = 0$ wegen $e^x \neq 0$. Also ist $W(0|2)$ Wendepunkt.

Wendetangente: $m = f'(0) = 1$, also $t : y = x + 2$.

(4) *Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ streng monoton steigend ist.*

Welche Aussage lässt sich daraus über die Anzahl der Extrempunkte folgern?

$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1+x^2)e^{x^2}$. Wegen $1+x^2 > 0$ und $e^{x^2} > 0$ ist $f'(x) > 0$ und damit f streng monoton steigend.

Insbesondere hat f keine Extrempunkte.

(5) *Der Bestand einer bedrohten Tierart lässt sich näherungsweise durch die Funktion*

$$f(t) = 0,1(t + 50)(t - 100)^2 + 1000$$

beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1900 und $f(t)$ die Anzahl der noch lebenden Tiere.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für die Zeit von 1900 bis in die Gegenwart.

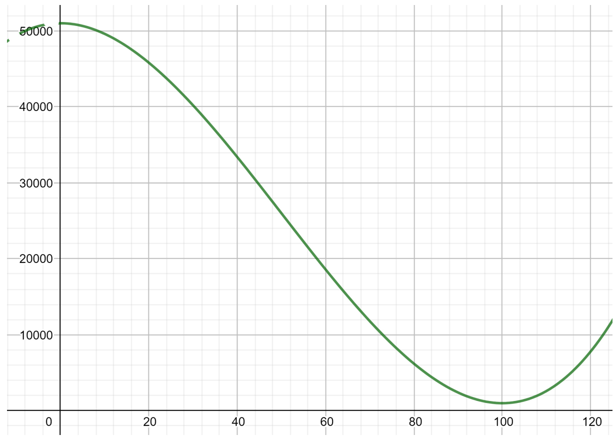
b) Wie viele Tiere lebten 1950? Wann waren es erstmals weniger als 10 000?

c) Wann lebten am wenigsten Tiere? Wie viele waren es zu diesem Zeitpunkt?

d) In welchem Zeitraum hat der Bestand um mehr als 600 Tiere pro Jahr abgenommen?

e) Um wie viele Tiere pro Jahr hat der Bestand seit 2000 bis heute durchschnittlich zugenommen?

a) Schaubild:



b) $f(50) = 26.000$. Im Jahre 1950 lebten 26.000 Tiere.

Wegen $f(72) \approx 10.564$ und $f(73) \approx 9.9667$ waren es 1973 erstmals weniger als 10.000 Tiere.

Wir finden

$$\begin{aligned} f(t) &= 0,1(t+50)(t-100)^2 + 1000 \\ &= 0,1(t+50)(t^2 - 200t + 10.000) + 1000 \\ &= 0,1(t^3 - 150t^2 + 50.000), \quad \text{also} \\ f'(t) &= 0,1(3t^2 - 300t) = 0,3t(t-100). \end{aligned}$$

Also ist $f'(t) = 0$ für $t = 0$ und $t = 100$.

Wegen $f''(t) = 0,1(6t - 300)$ ist $f''(0) = -30 < 0$ und $f''(100) = 30 > 0$. Also ist der Tierbestand 100 Jahre nach Beobachtungsbeginn am kleinsten. Wegen $f(100) = 1000$ gab es damals 1000 Tiere.

c) Gesucht ist der Zeitraum, in welchem die Änderungsrate kleiner als -600 Tiere pro Jahr beträgt. Also lösen wir $f'(t) = -600$:

$$\begin{aligned} 0,3(t^2 - 100t) &= -600 && \Big| +600 \\ 0,3t^2 - 30t + 600 &= 0 && \Big| :0,3 \\ t^2 - 100t + 2000 &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei $t \approx 27,6$ und $t_2 \approx 72,4$. Etwa zwischen 1927 und 1972 hat der Tierbestand um mehr als 600 Tiere pro Jahr abgenommen.

e) Mittelwert einer Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ ist gegeben durch

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Im vorliegenden Fall (heute = 2021) müssen wir also berechnen:

$$M = \frac{1}{21} \int_{100}^{121} f(t)\, dt = \frac{1}{21} \int_{100}^{121} (0,1t^3 - 15t^2 + 5.000)\, dt$$

$$= \frac{1}{21}(0,025t^4 - 5t^3 + 5000t)\Big|_{100}^{121} \approx 3440.$$

Im Schnitt hat der Bestand seit 2000 um 3440 Tiere pro Jahr zugenommen.

(6) *Zerlege die Zahl 390 so in drei Summanden, dass der zweite Summand dreimal so groß ist wie der erste und der dritte zweieinhalbmal so groß wie der erste.*

Es soll $390 = x + 3x + 2,5x = 6,5x$ sein. Daraus folgt $x = 60$, also $390 = 60 + 180 + 150$.