MATHEMATIK G9A

ÜBUNGEN

(1) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $x^2 + 40 = 13x$ b) $x^3 + 6x^2 = 40x$
c) $x^4 + 5x^2 = 14$ d) $(2x^2 - 10)(2x - 6) = 0$

(2) Löse die folgenden Gleichungen.

a) $\sqrt{x} = 16$ b) $\sqrt{2x + 1} = x - 1$
c) $x^3 - 5x = \frac{6}{x}$ d) $\frac{x - 1}{x + 1} + 2x + 1 = 0$

(3) Berechne den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln $a = b = 10$ und der Grundseite $c = 12$.

(4) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenlänge gleich x, $3x+3$ und $3x+4$. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

(5) Bestimme die Gleichung der Geraden durch P und Q:

a) $P(2|1), Q(3|3)$ b) $P(-1|4), Q(3|8)$
c) $P(-1|-2), Q(-2|-4)$ d) $P(1|-1), Q(-2|3)$

(6) Zeichne die Schaubilder der Funktionen f und g und berechne die Schnittpunkte.

a) $f(x) = x^2 - x + 1, g(x) = 2 - x$ b) $f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = x + 3$
c) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3 - x^2$ d) $f(x) = 4x + 3, g(x) = 3x + 4$

Lösungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen.

a)	$x^2 + 40 = 13x$	b)	$x^3 + 6x^2 = 40x$
c)	$x^4 + 5x^2 = 14$	d)	$(2x^2 - 10)(2x - 6) = 0$

(a) $0 = x^2 - 13x + 40 = (x-5)(x-8)$; $x_1 = 5$, $x_2 = 8$.

(b) $0 = x(x^2 + 6x - 40) = x(x+10)(x-4)$: $x_1 = 0$, $x_2 = -10$, $x_3 = 4$.

(c) $0 = x^4 + 5x^2 - 14 = (x^2 + 7)(x^2 - 2)$ liefert $x^2 = -7$ (keine Lösung) oder $x^2 = 2$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

(d) Satz vom Nullprodukt: $2x^2 = 10$ ergibt $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, $2x - 6 = 0$ ergibt $x_3 = 3$.

(2) Löse die folgenden Gleichungen.

a)	$\sqrt{x} = 16$	b)	$\sqrt{2x+1} = x - 1$
c)	$x^3 - 5x = \dfrac{6}{x}$	d)	$\dfrac{x-1}{x+1} + 2x + 1 = 0$

(a) Quadrieren ergibt $x = 256$.

(b) Quadrieren (binomische Formel) ergibt $2x+1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, also $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$ und damit $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Probe: $x_1 = 0$ liefert $\sqrt{1} = -1$, also ist $x_1 = 0$ keine Lösung.

$x_2 = 4$ liefert $\sqrt{9} = 3$, also ist $x_2 = 4$ eine Lösung.

(c) Multiplizieren mit x ergibt $0 = x^4 - 5x^2 - 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

(d) Nenner wegschaffen:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} + 2x + 1 &= 0 & \quad \Big| \cdot (x+1) \\ x - 1 + (2x+1)(x+1) &= 0 \\ x - 1 + 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ 2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Also $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

(3) *Berechne den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln $a = b = 10$ und der Grundseite $c = 12$.*

Skizze, Höhe einzeichnen. Im gleichschenkligen Dreieck halbiert die Höhe auf die Grundseite dieselbe; also ist nach Pythagoras $6^2 + h^2 = 10^2$, was $h = 8$ ergibt.

Flächeninhalt ist $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

(4) *In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenlänge gleich x, $3x+3$ und $3x+4$. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.*

Pythagoras (lange Seite $3x + 4$ steht allein):

$$\begin{aligned} x^2 + (3x+3)^2 &= (3x+4)^2 \\ x^2 + 9x^2 + 18x + 9 &= 9x^2 + 24x + 16 \\ x^2 - 6x - 7 &= 0 \\ (x+1)(x-7) &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung $x = -1$ ist nicht sinnvoll (Seitenlängen sind positiv); also ist $x = 7$, somit sind die drei Seiten des Dreiecks 7, 24 und 25.

Umfang $U = 7+24+25 = 56$, Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 = 84$.

(5) *Bestimme die Gleichung der Geraden durch P und Q:*

a) $P(2|1), Q(3|3)$ b) $P(-1|4), Q(3|8)$
c) $P(-1|-2), Q(-2|-4)$ d) $P(1|-1), Q(-2|3)$

Steigungsformel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

(a) $m = \frac{3-1}{3-2} = 2$; Einsetzen von P in $y = mx + b$ ergibt $1 = 2 \cdot 2 + b$, also $b = -3$. Gerade $y = 2x - 3$. Probe mit Q: $3 = 2 \cdot 3 - 3$: richtig.

(b) $m = 1$, $y = x + 5$.

(c) $m = 2$, $y = 2x$.

(d) $m = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

(6) *Zeichne die Schaubilder der Funktionen f und g und berechne die Schnittpunkte.*

a) $f(x) = x^2 - x + 1, g(x) = 2 - x$ b) $f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = x + 3$
c) $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3 - x^2$ d) $f(x) = 4x + 3, g(x) = 3x + 4$

Ansatz für Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$.

(a) $x^2 - x + 1 = 2 - x$ ergibt $x^2 = 1$, also

- $x_1 = -1$, $y_1 = 2 - (-1) = 3$: $S_1(-1|3)$;
- $x_2 = +1$, $y_2 = 2 - 1 = 1$: $S_1(1|1)$.

(b) $x^2 + 2x + 1 = x + 3$ ergibt $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$, also $S_1(-2|1)$ und $S_2)(1|4)$.

(c) $x^2 + 1 = 3 - x^2$ ergibt $2x^2 = 2$, also $S_1(-1|2)$ und $S_2(1|2)$.

(d) $4x + 3 = 3x + 4$ ergibt $S(1|7)$.