MATHEMATIK G9A

KLASSENARBEIT 4 21.05.2019

Aufgabe	1	2	3	4	5a)	b)	c)	d)	6
Punkte (max)	4	4	5	3	5	3	3	2	1
Punkte									

Bitte keine Lösungen auf das Arbeitsblatt schreiben!

(1) Vereinfache so weit wie möglich.

a) $16^{-\frac{1}{2}} =$

b) $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b} =$

c) $\sqrt{9 + 4b^2} =$

d) $3^m : 3^{2-m} =$

(2) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ zeichnerisch.

(3) Zeige, dass das Dreieck ABC mit

$$A(14|1|15), \quad B(8|-5|12), \quad C(15|-1|16)$$

gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist, und bestimme die Koordinaten eines Punkts D, der das Dreieck zu einer Raute ergänzt.

(4) Gegeben sind der Punkt $A(5|-1|2)$ und $M(3|3|6)$. Bestimme B so, dass M der Mittelpunkt von A und B ist.

Gib weiter einen Punkt C an, der von A genauso weit entfernt ist wie B.

(5) Von einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD und Spitze S sind

$$A(2|0|1), \quad B(4|2|1), \quad C(2|4|1) \quad \text{und} \quad S(2|2|6)$$

gegeben.

a) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

b) Bestimme die Koordinaten von D so, dass A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrats sind.

Fertige eine Zeichnung der Pyramide an.

c) Bestimme die Höhe der Pyramide und berechne ihr Volumen.

d) Bestimme z so, dass das Dreieck ACT mit $T(2|2|z)$ rechtwinklig mit rechtem Winkel in T ist.

(6) Ordne die Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten:

$$3 \quad \sqrt{5} \quad \frac{16}{5} \quad 2 \quad \pi$$

Lösungen

(1) Vereinfache so weit wie möglich.

a) $16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$

c) $\sqrt{9 + 4b^2} = \sqrt{9 + 4b^2}$

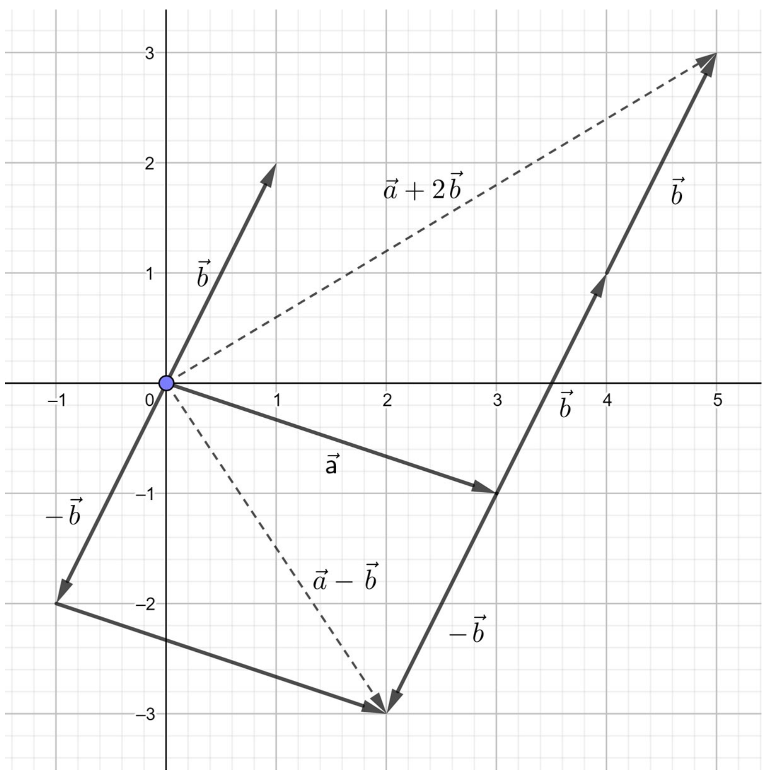
d) $3^m : 3^{2-m} = 3^{2m-2}$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} = a - b$$

$$3^m : 3^{2-m} = 3^{m-(2-m)} = 3^{2m-2}$$

(2) Sei $\vec{a} = \binom{3}{-1}$ und $\vec{b} = \binom{1}{2}$. Bestimme $\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ zeichnerisch.

Man bestimmt $\vec{a} + 2\vec{b}$, indem man den Vektor $\vec{b}$ zweimal an $\vec{a}$ anlegt. Entsprechend bestimmt man $\vec{a} - \vec{b}$, indem man $-\vec{b}$ an $\vec{a}$ anlegt:



(3) *Zeige, dass das Dreieck ABC mit*

$$A(14|1|15), \quad B(8|-5|12), \quad C(15|-1|16)$$

gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist, und bestimme die Koordinaten eines Punkts D, der das Dreieck zu einer Raute ergänzt.

Berechnung der Vekoren in ihrer Längen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 9$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = 9$$

Das Dreieck ist gleichschenklig, kann aber nicht rechtwinklig sein, weil es keine längste Seite gibt (oder wegen $\sqrt{6}^2 + 9^2 \neq 9^2$).

Weil die Seiten AB und BC gleich lang sind, erhält man nur dann eine Raute, wenn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ist. Also folgt

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-14 \\ 5-1 \\ 19-15 \end{pmatrix},$$

d.h. $D(21|5|19)$.

(4) *Gegeben sind der Punkt $A(5|-1|2)$ und $M(3|3|6)$. Bestimme B so, dass M der Mittelpunkt von A und B ist.*

Gib weiter einen Punkt C an, der von A genauso weit entfernt ist wie B.

Wir schreiben die Punkte A und M untereinander und bestimmen B so, dass M der Mittelpunkt von AB wird:

$$\begin{array}{cccccccc} A & (& 5 & | & -1 & | & 2 &) \\ M & (& 3 & | & 3 & | & 6 &) \\ B & (& 1 & | & 7 & | & 10 &) \end{array}$$

Der Punkt C muss so gewählt werden, dass A der Mittelpunkt von BC wird:

$$\begin{array}{cccccccc} B & (& 1 & | & 7 & | & 10 &) \\ A & (& 5 & | & -1 & | & 2 &) \\ C & (& 9 & | & -9 & | & -6 &) \end{array}$$

(5) *Von einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S sind*

$$A(2|0|1), \quad B(4|2|1), \quad C(2|4|1) \quad \textit{und} \quad S(2|2|6)$$

gegeben.

a) *Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.*

Berechnung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8},$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad |\overrightarrow{AB}| = 4,$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8}.$$

Das Dreieck ist gleichschenklig wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, und rechtwinklig in B wegen

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2 = |\overrightarrow{AC}|^2.$$

b) *Bestimme die Koordinaten von D so, dass A, B, C und D Eckpunkte eines Quadrats sind.*

Es muss $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gelten, also

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2-0 \\ 4-2 \\ 1-1 \end{smallmatrix}\right)$$

und damit $D(0|2|1)$.

Fertige eine Zeichnung der Pyramide an.

c) Bestimme die Höhe der Pyramide und berechne ihr Volumen.

Die Punkte A, B, C und D haben alle Höhe 1 über der x_1x_2-Ebene, der Punkt $S(2|2|9)$ Höhe 9; also ist die Höhe der Pyramide $h = 8$ (kann man auch an der Zeichnung ablesen).

Das Volumen der Pyramide ist $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei $G = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 8$ die Fläche des Quadrats $ABCD$ ist. Damit folgt $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8 = \frac{64}{3}$.

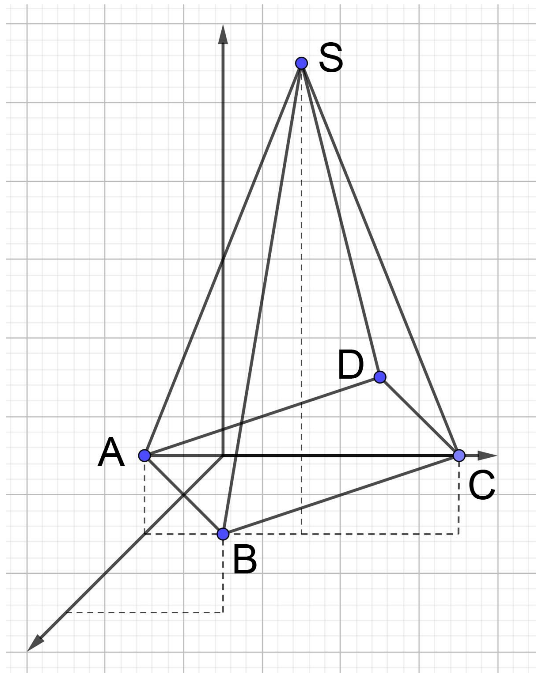


Abbildung 1. Pyramide ABCDS

d) *Bestimme z so, dass das Dreieck ACT mit $T(2|2|z)$ rechtwinklig mit rechtem Winkel in T ist.*

Dazu muss der Satz des Pythagoras

$$|\overrightarrow{AT}|^2 + |\overrightarrow{BT}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$$

gelten. Nun ist

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{8}, \\
\overrightarrow{AT} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ z-1 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AT}| &= \sqrt{4+(z-1)^2}, \\
\overrightarrow{CT} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ z-1 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{CT}| &= \sqrt{4+(z-1)^2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AT}|^2 + |\overrightarrow{BT}|^2 &= \sqrt{4+(z-1)^2} + \sqrt{4+(z-1)^2} \\
&= 4 + (z-1)^2 + 4 + (z-1)^2 \\
&= 8 + 2(z-1)^2 = \sqrt{8}^2 = 8,
\end{aligned}$$

also folgt $z = 1$ und damit $T(2|2|1)$.

(6) *Ordne die Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten:*

$$3 \quad \sqrt{5} \quad \frac{16}{5} \quad 2 \quad \pi$$

Es ist $2 < \sqrt{5} < 3$, $\frac{16}{5} = 3{,}2$ und $\pi \approx 3{,}14$. Also gilt

$$2 < \sqrt{5} < 3 < \pi < \frac{16}{5}.$$