REINQUADRATISCHE GLEICHUNGEN

FRANZ LEMMERMEYER

Heute beginnen wir mit dem Lösen quadratischer Gleichungen. Dazu wiederholen wir den Begriff der Quadratwurzel.

1. Quadratwurzeln

Ein Quadrat der Seitenlänge $a = 8$ cm hat, wie wir wissen, einen Flächeninhalt von $a^2 = 64$ cm^2. Umgekehrt erhält man die Seitenlänge aus dem Flächeninhalt, indem aus 64 die Quadratwurzel zieht:

$$\sqrt{64} = 8,$$

weil $8^2 = 64$ ist. Allgemein ist die Wurzel aus einer Zahl diejenige positive Zahl, deren Quadrat die gegebene Zahl ergibt.

Aus der Tabelle der Quadratzahlen

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36

kann man, wenn man von unten nach oben liest, auch die Quadratwurzeln ablesen:

m	1	4	9	16	25	36
$\sqrt{m}$	1	2	3	4	5	6

Wer seine auswendig gelernten Quadratzahlen bis 400 wieder vergessen hat: jetzt wäre ein guter Zeitpunkt, sie zu wiederholen!

Wenn man weiß. dass $\sqrt{121} = 11$ ist, kann man auch $\sqrt{1,21}$ ausrechnen: wegen $11 \cdot 11 = 121$ ist sicher $1,1 \cdot 1,1 = 1,21$. Weil man links zwei Mal das Komma verschoben hat, muss man beim Ziehen der Quadratwurzel das Komma um zwei Stellen verschieben: $\sqrt{1,21} = 1,1$.

Ganz einfach wird dadurch das Ziehen der Quadratwurzeln aus Zehnerpotenzen mit einer geraden Anzahl von Nullen: bei $\sqrt{10.000} = 100$ muss man die Anzahl der Nullen einfach halbieren.

Aufpassen muss man bei Kommazahlen: $\sqrt{0,4}$ ist **nicht** $0,2$, weil $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$ ist! Richtig ist daher $\sqrt{0,04} = 0,2$ (Eselsbrücke: auch hier wird die Anzahl der Nullen halbiert, wenn man die führende Null mitzählt). Wer sich nicht hereinlegen lassen will, sollte solche Dezimalzahlen als Brüche schreiben: bei

$$\sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

kann man eigentlich nichts falsch machen.

Übungen

Die folgenden Übungen sind **ohne Taschenrechner** zu lösen und **mit Taschenrechner** zu kontrollieren!

(1) Berechne folgende Quadratwurzeln:

(a)	$\sqrt{9}$	$=$	(b)	$\sqrt{81}$	$=$
(c)	$\sqrt{121}$	$=$	(d)	$\sqrt{400}$	$=$
(e)	$\sqrt{169}$	$=$	(f)	$\sqrt{196}$	$=$

(2) Berechne folgende Quadratwurzeln:

(a)	$\sqrt{100}$	$=$	(b)	$\sqrt{1.000.000}$	$=$
(c)	$\sqrt{400}$	$=$	(d)	$\sqrt{900}$	$=$
(e)	$\sqrt{1600}$	$=$	(f)	$\sqrt{250.000}$	$=$

(3) Berechne folgende Quadratwurzeln:

(a)	$\sqrt{1,44}$	$=$	(b)	$\sqrt{2,25}$	$=$
(c)	$\sqrt{1,96}$	$=$	(d)	$\sqrt{0,09}$	$=$
(e)	$\sqrt{0,16}$	$=$	(f)	$\sqrt{0,25}$	$=$

(4) Berechne folgende Quadratwurzeln:

(a)	$\sqrt{0,0001}$	$=$	(b)	$\sqrt{0,0036}$	$=$
(c)	$\sqrt{0,0225}$	$=$	(d)	$\sqrt{0,0144}$	$=$
(e)	$\sqrt{0,81}$	$=$	(f)	$\sqrt{0,0081}$	$=$

2. Reinquadratische Gleichungen

Wenn wir das Schaubild der Funktion $y = x^2 - 4$ mit Hilfe einer Wertetabelle zeichnen, erhalten wir

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Hierbei sind $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ die Schnittpunkte des Schaubilds mit der x-Achse, und die x-Koordinaten $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$ nennt man die **Nullstellen** der Parabel.

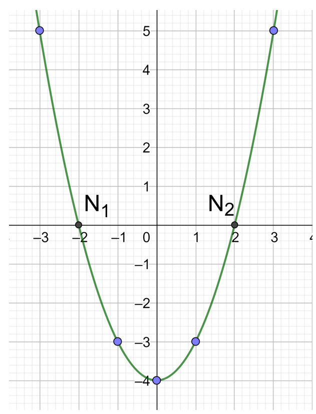

Abbildung 1. Schaubild von $y = x^2 - 4$ mit den beiden Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$.

Diese kann man (in diesem Fall) an der Wertetabelle ablesen: Die Nullstellen sind diejenigen x-Koordinaten, bei denen $y = 0$ ist. Man kann sie aber auch direkt aus der Gleichung berechnen. Um die Nullstellen von $y = x^2 - 4$ zu berechnen, setzt man $y = 0$ und erhält die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4 = 0.$$

Addition von 4 auf beiden Seiten ergibt

$$x^2 = 4.$$

Wurzelziehen liefert

$$x = \pm 2,$$

also $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$ (oder kurz $x_{1,2} = \pm 2$). Hier ist darauf zu achten, dass die Gleichung $x^2 = 4$ **zwei** Lösungen hat: Beim Wurzelziehen muss man also daran denken, auf einer der beiden Seiten der Gleichung ein $\pm$ einzufügen.

Genauso geht man vor, wenn man die Nullstellen von $y = 2x^2 - 10$ berechnen muss:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10 &= 0 && \big| :2 \\ x^2 - 5 &= 0 && \big| +5 \\ x^2 &= 5 && \big| \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{5}, \end{aligned}$$

d.h. es ist $x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$. Dabei ist $\sqrt{5} \approx 2,236$ **positiv**!

Die Parabel $y = x^2 + 1$ dagegen hat keine Nullstellen; sie ist die um 1 nach oben verschobene Normalparabel. Versucht man, deren Nullstellen trotzdem auszurechnen, erhält man

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 && \big| -1 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Jetzt kann man aber keine Wurzel ziehen, weil es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat -1 ist. Also hat die Gleichung keine Lösung, die Parabel entsprechend keine Nullstellen.

Übungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 3 = 0$ b) $4x^2 = 16$
c) $x^2 + 9 = 0$ d) $2x = 7$

(2) Bestimme die Nullstellen folgender Parabeln:

a) $y = x^2 - 6$ b) $y = x^2 - 25$
c) $y = 2x^2 - 8$ d) $y = -x^2 - 1$

(3) Bestimme die Schnittpunkte der folgenden Parabeln mit der x-Achse:

a) $y = 9 - x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$
c) $y = 2x^2 + 8$ d) $y = x^2$

(4) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x = \frac{4}{x}$ b) $x^2 = -x^2$
c) $(x-3)(x+3) = 0$ d) $x(x+3) - 3(x+2) = 3$

Lösungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x^2 - 3 = 0$ b) $4x^2 = 16$
c) $x^2 + 9 = 0$ d) $2x = 7$

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ b) $x_{1,2} = \pm 2$
c) keine Lösung d) $x = \frac{3}{2}$

(2) Bestimme die Nullstellen folgender Parabeln:

a) $y = x^2 - 6$ b) $y = x^2 - 25$
c) $y = 2x^2 - 8$ d) $y = -x^2 - 1$

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$ b) $x_{1,2} = \pm 5$
c) $x_{1,2} = \pm 2$ d) keine Lösung

(3) Bestimme die Schnittpunkte der folgenden Parabeln mit der x-Achse:

a) $y = 9 - x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$
c) $y = 2x^2 + 8$ d) $y = x^2$

a) $N_1(-3|0), N_2(3|0)$ b) $N_1(-4|0), N_2(4|0)$
c) keine Nst. d) $N(0|0)$

(4) Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x = \frac{4}{x}$ b) $x^2 = -x^2$

c) $(x-3)(x+3) = 0$ d) $x(x+3) - 3(x+2) = 3$

Diese Gleichungen muss man erst auf die Form $x^2 = c$ bringen.

$$\begin{aligned} a) \quad x &= \tfrac{4}{x} && \Big|\ \cdot x \\ x^2 &= 4 && \Big|\ \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 &= -x^2 && \Big|\ + x^2 \\ 2x^2 &= 0 && \Big|\ : 2 \\ x^2 &= 0 && \Big|\ \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad (x-3)(x+3) &= 0 && \text{binomische Formel} \\ x^2 - 9 &= 0 && \Big|\ + 9 \\ x^2 &= 9 && \Big|\ \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad x(x+3) - 3(x+2) &= 3 && \text{Klammern auflösen} \\ x^2 + 3x - (3x+6) &= 3 && \text{Minusklammer!} \\ x^2 + 3x - 3x - 6 &= 3 && \Big|\ + 6 \\ x^2 &= 9 && \Big|\ \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 3 \end{aligned}$$