PARABELN

FRANZ LEMMERMEYER

1. Scheitelpunkte

Das letzte Mal haben wir gesehen, dass $y = x^2 - 1$ die um 1 nach unten verschobene Normalparabel beschreibt. Heute wird es um das Verschieben nach links und rechts gehen.

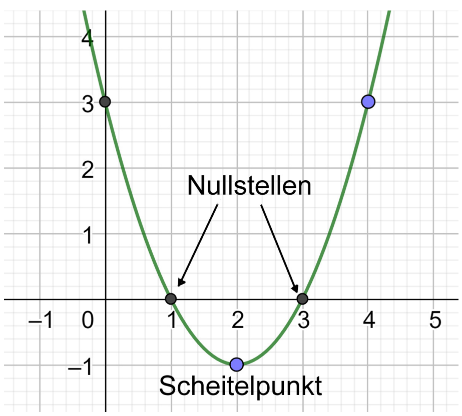
Dazu betrachten wir die Parabel

$$y = (x-2)^2 - 1.$$

Auch diese Parabel kann man durch das Erstellen einer Wertetafel zeichnen:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3

Das Schaubild sieht damit so aus:



An den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ ist $y = 0$; Stellen mit $y = 0$ nennt man **Nullstellen**. Quadratische Funktionen können höchstens zwei Nullstellen haben, Geraden höchstens eine.

Den tiefsten Punkt einer nach oben offenen Parabel (ebenso wie den höchsten Punkt einer nach oben offenen Parabel nennt man den **Scheitelpunkt**. Bei der obigen Parabel ist der Scheitelpunkt $S(2|-1)$.

Im Rest des Schuljahrs werden wir den beiden folgenden Fragen nachgehen:

- Wie kann man die Nullstellen einer Parabel berechnen?
- Wie kann man den Scheitelpunkt einer Parabel berechnen?

Betrachten wir noch einmal die quadratische Funktion $y = (x-2)^2 - 1$. Wenn wir $x = 2$ einsetzen, wird die Klammer $= 0$, und wir finden $y = -1$. Der Punkt $S(2|-1)$ liegt also auf der Parabel.

Wie kann man aber erkennen, dass $S(2|-1)$ der Scheitelpunkt der Parabel ist? Wenn wir einen Wert ganz nahe bei $x = 2$ einsetzen, dann wird die Klammer $(x-2)^2$ ebenfalls klein, aber sicherlich positiv sein. So erhalten wir

- für $x = 2,1$ die y-Koordinate $y = (2,1-2)^2 - 1 = 0,1^2 - 1 = 0,01 - 1 = -0,99$, und
- für $x = 1,9$ die y-Koordinate $y = (1,9-2)^2 - 1 = (-0,1)^2 - 1 = 0,01 - 1 = -0,99$.

Für x nahe bei 2 ist die y-Koordinate also (ein wenig) größer als die y-Koordinate -1 an der Stelle $x = 2$. Also ist $S(2|-1)$ der Scheitelpunkt.

Anders ausgedrückt: die y-Koordinate $y = (x-2)^2 - 1$ kann nicht kleiner als -1 werden, weil das Quadrat $(x-2)^2$ nie negativ ist.

An Gleichungen der Form $y = (x-e)^2 + f$ kann man also den Scheitel der Parabel ablesen: Wenn man $x = e$ einsetzt, folgt $y = (e-e)^2 + f = f$, und wenn man andere Werte für x einsetzt, erhält man y-Koordinaten $> f$. Also ist $S(e|f)$ der Scheitelpunkt der durch $y = (x-e)^2 + f$ beschriebenen Parabel.

Beispiel: Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel $y = (x+1)^2 + 1$. Hier muss man $x = -1$ einsetzen, damit die Klammer 0 wird, und daher ist $S(-1|1)$ der Scheitel dieser Parabel.

Übungen.

(1) Lies den Scheitel der folgenden Parabeln ab:

a) $y = (x-1)^2 + 2$ b) $y = (x+2)^2 - 1$

c) $y = x^2 + 4$ d) $y = (x-2)^2 + 3$

(2) Gib Parabeln an, welche den folgenden Scheitelpunkt besitzen:

a) $S(0|0)$ b) $S(1|-2)$

c) $S(-3|-2)$ d) $S(-1|0)$

2. Scheitelform

Um den Scheitelpunkt einer Parabel zu bestimmen, die in der Form $y = ax^2+bx+c$ (Normalform) gegeben ist, muss man sie in die Scheitelform $y = a(x-e)^2 + f$ bringen. Wir beschränkten uns vorläufig auf den Fall von nach oben offenen Normalparabeln, also Gleichungen der Form $y = x^2 + bx + c$.

Wo liegt also der Scheitel der Parabel $y = x^2 - 4x + 4$? Hier muss man erkennen, dass auf der rechten Seite der Gleichung eine binomische Formel steht: $y = (x-2)^2$. Also ist $S(2|0)$ der Scheitel dieser Parabel.

Übungen.

(3) Benutze die binomischen Formeln, um folgende Gleichungen in Scheitelform zu bringen, und lies den Scheitelpunkt ab.

a) $y = x^2 - 6x + 9$ b) $y = x^2 + 4x + 4$

c) $y = x^2 - 8x + 16$ d) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

(4) Bringe die folgenden Gleichungen aus der Scheitelform in die Normalform:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = (x-2)^2 - 2$

c) $y = (x+3)^2 - 5$ d) $y = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

Was muss man tun, wenn die rechte Seite keine binomische Formel ist? Betrachten wir dazu $y = x^2 - 4x + 1$. Wir halbieren den Koeffizienten von x, also -4, und betrachten die binomische Formel $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Hier passt nur die letzte 4 nicht; um daraus eine 1 zu machen, müssen wir 3 subtrahieren:

$$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1.$$

Diese Parabel hat also den Scheitel $S(2|-3)$.

Wir geben die Rechnungen, die auf die Scheitelform geführt haben, noch einmal an:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 1 && \Big|\ \tfrac{-4}{2} = -2,\ (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

Dieses Schema wird stur abgespult. Um $y = x^2 + x$ auf Scheitelform zu bringen, halbiert man den Koeffizienten 1 von x und betrachtet

$(x+\frac12)^2 = x^2 + 2\cdot\frac12\cdot x + \frac14 = x^2 + x + \frac14$. Dann schreibt man

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x \\ &= x^2 + x + \tfrac14 - \tfrac14 \\ &= (x+\tfrac12)^2 - \tfrac14 \end{aligned}$$

und liest den Scheitel $S(-\frac12|-\frac14)$ ab. Hierbei haben wir $\frac14$ addiert, um aus x^2+x eine binomische Formel zu machen, und gleich wieder subtrahiert, damit alles gleich bleibt.

Das Umwandeln einer Parabelgleichung in die Scheitelform erfordert viel Übung. Das Schema ist aber immer dasselbe: Halbieren des Koeffizienten von x, Ergänzen zur binomischen Formel, Scheitel ablesen.

Übungen.

(5) Bringe in Scheitelform und lies den Scheitelpunkt ab:

a) $y = x^2 + 2x$ b) $y = x^2 - 2x + 3$

c) $y = x^2 - 4x + 7$ d) $y = x^2 - 6x + 8$

(6) Bringe in Scheitelform und lies den Scheitelpunkt ab:

a) $y = x^2 + x + 1$ b) $y = x^2 - 3x$

c) $y = x^2 + 3x + 1$ d) $y = x^2 - 5x$

Antworten

(1) Hier findet man:

a) $S(1|2)$ b) $S(-2|-1)$
c) $S(0|4)$ d) $S(2|3)$

(2) Mögliche Antworten sind:

a) $y = x^2$ b) $y = (x-1)^2 - 2$
c) $y = (x+3)^2 - 2$ d) $y = (x+1)^2$

(3) Hier finden wir

a) $y = (x-3)^2$ b) $y = (x+2)^2$
c) $y = (x-4)^2$ d) $y = (x-\frac{1}{2})^2$

Die Scheitelpunkte sind

a) $S(3|0)$ b) $S(-2|)0$
c) $S(4|0)$ d) $S(\frac{1}{2}|0)$

(4) Hier muss man nur ausmultiplizieren:

a) $y = x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^2 - 4x + 2$
c) $y = x^2 + 6x + 4$ d) $y = x^2 + x$

(5) Hier findet man

a) $(x+1)^2 - 1$ b) $y = (x-1)^2 + 2$
c) $y = (x-2)^2 + 3$ d) $y = (x-3)^2 - 1$

Die Scheitelpunkte sind

a) $S(-1|-1)$ b) $S(1|2)$
c) $S(2|3)$ d) $S(3|-1)$

(6) Hier findet man

a) $y = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ b) $y = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$
c) $y = (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$ d) $y = (x-\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

Die Scheitelpunkte sind

a) $S(-\frac{1}{2}|\frac{3}{4})$ b) $S(\frac{3}{2}|-\frac{9}{4})$
c) $S(-\frac{3}{2}|-\frac{5}{4})$ d) $S(\frac{5}{2}|-\frac{25}{4})$

Wenn immer das falsche rauskommt: Email!