MATHEMATIK G10C KLASSENARBEIT 2

17.01.2019

Aufgabe	1a)	b)	c)	2a)	b)	c)	d)	e)
Punkte (max)	3	2	1	1	2	2	3	1
Punkte								

Aufgabe	3a)	b)	c)	d)	e)
Punkte (max)	2	3	2	2	4
Punkte					

(1) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Eckpunkten

$$A(-2|-1|2), B(0|3|6)), C(4|2|-4)).$$

(a) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(b) Ergänze das Dreieck zu einem Rechteck und bestimme dessen Flächeninhalt.

(c) Auf der Diagonale des Rechtecks wird ein Quadrat errichtet (dessen Seitenlänge also die Länge der Diagonalen ist). Bestimme den Flächeninhalt dieses Quadrats.

(2) Gegeben sind die Punkte $P(1|3|3)$, $Q(9|2|11)$ und die Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch P und Q.

(b) Untersuche, ob die Punkte $A(0|0|2)$ und $B(2|1|4)$ auf der Geraden h liegen.

(c) Welche Punkte auf der Geraden g sind von Q gleich weit entfernt wie P?

(d) Untersuche die gegenseitige Lage von g und h.

(e) Gib die Gleichung einer Geraden an, welche durch A geht und parallel zu h ist.

(3) Ein U-Boot bewegt sich geradlining und mit konstanter Geschwindigkeit. In einem geeigneten Koordinatensystem wird seine Position beschrieben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

wobei die Meeresoberfläche durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird, t die Zeit in Stunden nach Beginn des Tauchgangs bezeichnet, und alle Längenangaben in km sind.

(a) Begründe, dass das U-Boot sich bei Beobachtungsbeginn an der Meeresoberfläche befindet. An welcher Position befindet es sich nach einer Stunde?

(b) Begründe, dass das Boot sinkt. Nach wieviel Minuten hat es eine Tiefe von 1 km erreicht?

(c) Berechne die Geschwindigkeit des U-Boots.

(d) Ein zweites U-Boot hat t Stunden nach Beobachtungsbeginn die Position

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zu welchem Zeitpunkt haben beide U-Boote dieselbe Tiefe? In welcher Tiefe befinden sie sich dann?

(e) Zeige, dass sich die Bahnen der U-Boote kreuzen, dass aber keine Kollisionsgefahr besteht.

1. Lösungen

(1) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Eckpunkten

$$A(-2|-1|2), B(0|3|6)), C(4|2|-4)).$$

Wir berechnen die drei Vektoren, welche die Eckpunkte verbinden:

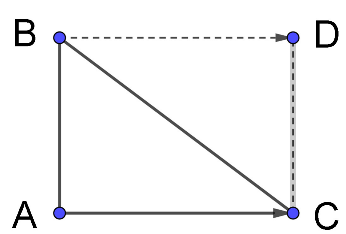
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6,$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC}| = 117,$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AC}| = 9.$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ ist das Dreieck rechtwinklig in A (der rechte Winkel ist immer gegenüber der längsten Seite).

Skizze eines rechtwinkligen Dreicks mit rechtem Winkel in A zeigt, dass das Rechteck so aussehen muss:



Also muss $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (oder $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) gelten. Daraus folgt

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ?-0 \\ ?-3 \\ ?-6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BD},$$

und man liest ab, dass $D(6|6|0)$ sein muss.

Als Kontrolle kann man die Mittelpunkte M_{AD} und M_{BC} berechnen und vergleichen: diese sind gleich, nämlich $M_{AD}(2|2,5|1)$ und $M_{BC}(2|2,5|1)$

Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten $|\overrightarrow{AB}| = 6$ und $|\overrightarrow{AC}| = 9$ ist $F = 6 \cdot 9 = 54$.

Die Seite des neuen Quadats ist $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{117}$, dessen Flächeninhalt damit $F = \sqrt{117} \cdot \sqrt{117} = 117$.

(2) a) Die Geradengleichung ist

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

b) Punktprobe mit A:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + t \\ 0 &= 1 \\ 2 &= 1 + t \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung $0 = 1$ zeigt, dass A nicht auf h liegt (die andern beiden würden $t = 1$ liefern, aber die zweite ist für alle t falsch; damit der Punkt auf der Geraden liegt, müssen alle drei Gleichungen richtig sein).

Punktprobe mit B:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= -1 + t, \\ 1 &= 1 \\ 4 &= 1 + t. \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen sind für $t = 3$ richtig, also liegt B auf h.

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist richtig.

c) Skizze: —-P—Q—R—

Die beiden Punkte sind P und R, wobei man R so wählen muss, dass Q der Mittelpunkt von P und R wird.

$$\begin{aligned} &P(1|3|3) \\ &Q(9|2|11) \\ &R(17|1|19) \end{aligned}$$

Also muss $R(17|1|19)$ sein.

d) Schneiden ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + 8s &= -1 + t, \\ 3 - s &= 1 \\ 3 + 8s &= 1 + t \end{aligned}$$

Dies liefert $s = 2$ und $t = 18$, sowie den Schnittpunkt $S(17|01|19)$.

Die Geraden g und h schneiden sich also.

e) Damit die Gerade durch A geht, wählen wir $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor.

Damit sie parallel zu h ist, muss der Richtungsvektor ein Vielfaches des Richtungsvektors von h sein (Vektoren sind genau dann parallel, wenn sie Vielfache voneinander sind). Also ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Gleichung einer solchen Gerade.

(3) a) Die Tiefe des U-Boots kann man an der x_3-Koordinate ablesen. Bei Beobachtungsbeginn ist das U-Boot in $(2|-5|0)$; wegen $x_3 = 0$ ist es also an der Meeresoberfläche.

Nach einer Stunde (man muss $t = 1$ einsetzen) ist das U-Boot in $(8|1|-3)$.

b) Da die x_3-Koordinate des Richtungsvektors negativ ist, sinkt das U-Boot (und zwar pro Stunde um 3 km).

Damit das U-Boot eine Tiefe von 1 km erreicht, muss also $x_3 = 1$ sein. Vergleicht man dies mit $x_3 = 0 - 3t$, folgt $t = \frac{1}{3}$, also hat es nach 20 Minuten eine Tiefe von 1 km erreicht.

c) In einer Stunde legt das U-Boot den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ zurücke. Die Länge des Richtungsvektors ist $\sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$, also hat das U-Boot eine Geschwindigkeit von 9 km/h.

d) Beide U-Boote haben dieselbe Tiefe, wenn $-3t = -2 - t$ ist, also nach $t = 1$ Stunde. Sie befinden sich dann in 3 km Tiefe.

e) Schneiden liefert

$$\begin{aligned} 2 + 6t &= 6 + 2u \\ -5 + 6t &= 1 + u \\ -3t &= -2 - u. \end{aligned}$$

Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt $-5+3t=-1$, also $t=\frac{4}{3}$ und damit $u=2$; die Bahnen kreuzen sich also in $S(10|3|-4)$. Allerdings ist das zweite U-Boot mehr als eine Stunde nach dem ersten dort.