TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

FRANZ LEMMERMEYER

Zu den relativ einfachen Gleichungen kommen jetzt noch welche, die man mit Substitution löst.

Beispiel 1. Mit Substitution löst man einerseits Gleichungen wie
$$(\sin x)^2 - 3\sin x + 2 = 0.$$
Hier setzt man $z = \sin x$ und erhält die quadratische Gleichung
$$z^2 - 3z + 2 = 0,$$
die man mit *abc*-Formel oder Vieta ($(z-1)(z-2) = 0$) löst; die Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$ resubstituiert man und erhält dann die Gleichungen
$$\sin x = 1 \quad \text{und} \quad \sin x = 2.$$
Diese löst man, indem man die entsprechenden Werte aus dem Schaubild der Sinusfunktion abliest. Die Gleichung $\sin x = 1$ hat die Lösung $x_1 = \frac{\pi}{2}$, während $\sin x = 2$ keine Lösung hat, da $\sin x$ nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen kann.

Beispiel 2. Der zweite oft auftretende Gleichungstyp, den man am besten mit Substitution löst, ist der einer Gleichung der Form
$$\sin(2x) = 1$$
für $0 \le x \le \pi$. Hier substituiert man den Ausdruck in der Klammer, setzt also $z = 2x$ und hat dann $\sin z = 1$. Die Lösung dieser Gleichung ist $z_1 = \frac{\pi}{2}$. Jetzt wird resubstituiert: Einsetzen in $2x = z$ ergibt $2x = \frac{\pi}{2}$. Division durch 2 liefert $x_1 = \frac{\pi}{4}$ als einzige Lösung zwischen 0 und π.

Der Rest ist Übung.

Bemerkung: Die Klammer bei $\sin(x)$ kann man weglassen, wenn man den Ausdruck nicht missverstehen kann. Bei $\sin(x) + 1$ muss man die Klammer setzen, um den Ausdruck von $\sin(x+1)$ unterscheiden zu können, bei $1 + \sin x$ muss man dagegen keine Klammer setzen.

Übungen

(1) Löse folgende Gleichungen für $0 \le x \le 2\pi$.

a) $(\sin x)^2 - 2\sin x = 0$ b) $(\cos x)^2 + 2\cos x = 3$

c) $(\sin x)^2 - 4\sin x = 5$ d) $(\cos x)^2 = 3\cos x$

(2) Löse folgende Gleichungen

a) $\cos(3x) = 1$ b) $\sin(\pi x) = 0$

c) $(\cos(\pi x))^2 = 1$ d) $\sin(2\pi x) = 1$

Lösungen

(1) a) Diese Gleichung kann auch ohne Substitution gelöst werden, wenn man ausklammert:

$$(\sin x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$$

und der Satz vom Nullprodukt ergibt $\sin x = 0$ oder $\sin x = 2$. Die letzte Gleichung hat keine Lösung, die erste $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$.

Mit Substitution ginge es auch: $z = \sin x$ ergibt $z^2 - 2z = 0$, aber wenn man ausklammert und den Satz vom Nullprodukt anwendet, endet man wieder bei $z_1 = \sin x = 0$ und $z_2 = \sin x = 2$.

b) $z = \cos x$ ergibt $z^2 + 2z - 3 = 0$, also $z_1 = 1$ und $z_2 = -3$. Resubstitution liefert $\cos x = 1$ und $\cos x = -3$. Die letzte Gleichung hat keine Lösungen, die erste $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$.

c) $\sin x = z$ ergibt $z^2 - 4z - 5 = 0$, also $z_1 = -1$ und $z_2 = 5$. Resubstitution: $\sin x = -1$ liefert $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, die Gleichung $\sin z = 5$ hat keine Lösungen.

d) Die Gleichung $(\cos x)^2 - 3\cos x = 0$ kann man wieder mit Ausklammern und Satz vom Nullprodukt lösen: $\cos(x) \cdot (\cos(x) - 3) = 0$ liefert $\cos x = 0$ (die Gleichung $\cos x = 3$ hat keine Lösunge), also $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

(2) Hier substituiert man jeweils den Ausdruck in der Klammer.

a) $z = 3x$ liefert $\cos z = 1$, also $z_1 = 0$ und $z_2 = 2\pi$. Resubstitution: $3x = 0$ und $3x = 2\pi$, also $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

b)$z = \pi x$ liefert $\sin z = 0$, also $z_1 = 0$ $z_2 = \pi$ und $z_3 = 2\pi$. Resubstitution: $\pi x = 0$, $\pi x = \pi$ und $\pi x = 2\pi$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

c) Wurzelziehen ergibt $\cos \pi x = \pm 1$; $z = \pi x$ liefert $\cos z = \pm 1$, also $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$ und $z_3 = 2\pi$. Resubstitution zeigt $\pi x = 0$, $\pi x = \pi$ und $\pi x = 2\pi$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

d) Hier ergibt $z = 2\pi x$ die Gleichung $\sin z = 1$, d.h. $z_1 = \frac{\pi}{2}$. Resubstitution: $2\pi x = \frac{\pi}{2}$ ergibt, nach Division durch 2π, $x_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4}$.