TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

FRANZ LEMMERMEYER

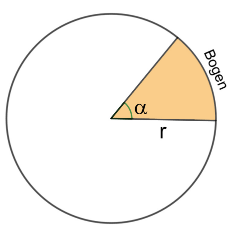
1. Das Bogenmass

Die Größe von Winkeln haben wir bisher in Grad gemessen (das werden wir auch weiterhin tun). Die Einteilung des Vollwinkels in 360° ist rein historisch bedingt: Es geht auf die Babylonier im ersten Jahrtausend vor Christus zurück, und hat wohl astronomische Gründe: Weil das Jahr wenig mehr als 360 Tage hat, wandert die Sonne jeden Tag um etwa 1° durch die Sternbilder.

Für die Analysis ist die Benutzung des Gradmaßes aber ungeschickt, weil die Formeln zur Ableitung der trigonometrischen Funktionen (vor allem Sinus und Kosinus) unnötig kompliziert werden, wenn man Grad benutzt.

Um das Bogenmaß zu erklären, schauen wir uns Kreisausschnitte an.

Kreisausschnitte. Die mathematische Form von Tortenstücken oder Pizzaschnitten nennt man Kreisausschnitte. Diese haben einen Flächeninhalt und einen Bogen, die man leicht mit Dreisatz bestimmen kann.

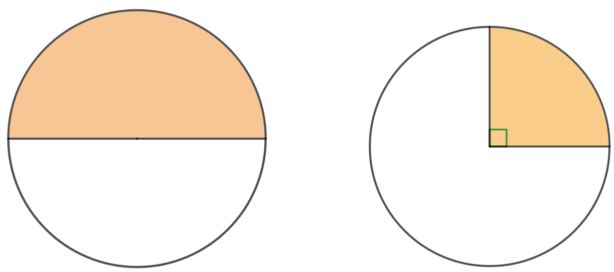


Ganz offenbar hängt der Flächeninhalt eines Kreisausschnitts vom Winkel α des Kreisausschnitts ab. Dabei entspricht ein doppelter Winkel offenbar ein doppelter Flächeninhalt: Flächeninhalt und Winkel sind proportional.

Im Falle, dass $\alpha = 360°$ ist, ist der Kreisausschnitt ein ganzer Kreis und hat Flächeninhalt $A = \pi r^2$. Ist $\alpha = 180°$ nur halb so groß, dann ist der Kreisausschnitt ein Halbkreis mit Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, und ein Viertelkreis (mit Innenwinkel 90°) hat sicherlich Flächeninhalt $\frac{1}{4}\pi r^2$. Offenbar ist der Flächeninhalt bei einem Kreissausschnitt mit einem

Winkel von 1° der 360te Teil der Fläche des ganzen Kreises, und bei einem Winkel α folglich

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2.$$



Ganz genauso funktioniert die Sache mit dem Bogen. Ist der Kreisausschnitt ein Kreis, der Innenwinkel also $\alpha = 360°$, dann ist die Länge des Bogens gleich dem Umfang $2\pi r$. Der Bogen b bei einem Halbkreis ($\alpha = 180°$) ist daher halb so groß, also $b = \pi r$. Bei einem beliebigen Innenwinkel α gilt wie im Falle des Flächeninhalts

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r.$$

Bogenmaß. Weil die Länge des Bogens proportional zum Innenwinkel ist, kann man (bei gegebenem Radius) Winkel in Bogenlänge und Bogelänge in Winkel umrechnen. Dies benutzt man jetzt zur Definition des Bogenmaßes eines Winkels: am Einheitskreis (ein Kreis mit Radius 1) entspricht der Vollwinkel 360° einem Bogen von 2π. Wir sagen jetzt, 2π sei das Bogenmaß des Winkels 2π. Das Bogemaß aller anderen Winkel berechnen wir mit Dreisatz: 180° entsprechen dem Bogenmaß π, und 60° dem Bogenmaß $\frac{\pi}{3}$.

Übungen

(1) Der Bogen eines Kreisausschnitts mit Radius 4 hat die Länge 3π. Wie groß ist der Innenwinkel?

(2) Verwandle die folgenden Winkel (notfalls mit Taschenrechner) in die jeweils andere Einheit:

Grad	90°	30°	120°	10°				
Bogenmaß					$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$

(3) Im Menü `MODE` kann man den Taschenrechner auf Gradmaß (degree) bzw. Bogenmaß (radian) einstellen; man sieht dann im display im ersten Falle ein D, im zweiten Falle ein R. Sowohl in der Mathematik als auch in der Physik kommt es vor, dass man zwischen den beiden Darstellungen wechseln muss; es ist also wichtig, darauf zu achten, welches Winkelmaß gerade eingestellt ist.

Berechne mit dem Taschenrechner die folgenden Werte:

a) $\sin 30^\circ =$ b) $(\sin 45^\circ)^2 =$

c) $\sin 90^\circ =$ d) $\sin 60^\circ =$

(4) Berechne mit dem Taschenrechner die folgenden Werte:

a) $\sin \frac{\pi}{3} =$ b) $\cos \pi =$

c) $\tan \frac{\pi}{4} =$ d) $\sin 1 =$

Lösungen.

(1) $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4 = 3\pi$ liefert $\alpha = \frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$.

(2) Verwandle die folgenden Winkel (notfalls mit Taschenrechner) in die jeweils andere Einheit:

Grad	90°	30°	120°	10°	45°	225°	120°	36°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$

(3) Berechne mit dem Taschenrechner die folgenden Werte:

a) $\sin 30^\circ = 0,5$ b) $(\sin 45^\circ)^2 = 0,5$

c) $\sin 90^\circ = 1$ d) $\sin 60^\circ \approx 0,866$

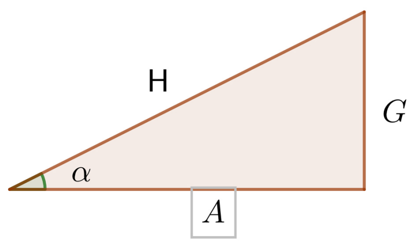
(4) Berechne mit dem Taschenrechner die folgenden Werte:

a) $\sin \frac{\pi}{3} \approx 0.866$ b) $\cos \pi = -1$

c) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ d) $\sin 1 \approx 0,841$

2. Die Sinusfunktion

In Klasse 9 haben wir den Sinues eines Winkels am rechtwinkligen Dreieck erklärt:

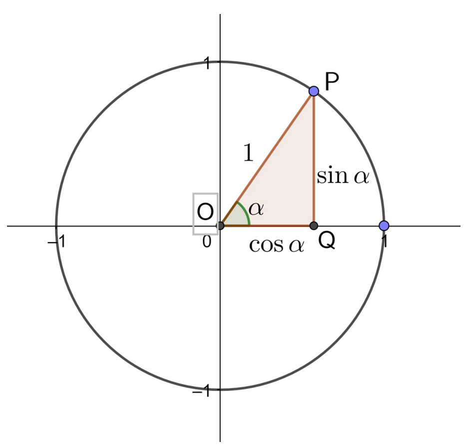


Hier gelten bekanntlich die Beziehungen

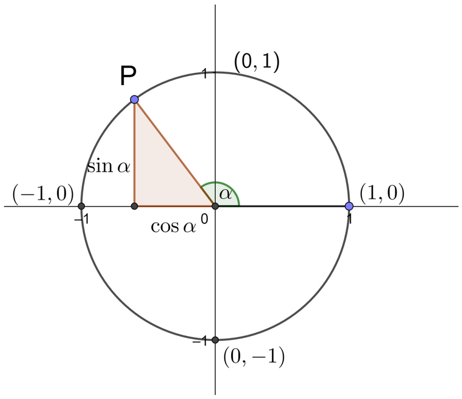
$$\sin \alpha = \frac{G}{H}, \qquad \cos \alpha = \frac{A}{H} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{G}{A},$$

wobei A und G die Ankathete bzw. die Gegenkathete von α, und H die Hypotenuse des Dreiecks bezeichnet.

Nun legt jeder Winkel α im Einheitskreis ein rechtwinkliges Dreieck OPQ fest. Für Winkel $0° < \alpha < 90°$ ist $\sin \alpha$ die y-Koordinate des Punkts P auf dem Einheitskreis, der durch den Winkel α festgelegt ist: dies liegt daran, dass auch hier $\sin \alpha = \frac{G}{H}$; weil die Hypotenuse H hier aber gleich dem Radius des Einheitskreises ist, gilt $H = 1$, und die Gegenkathete hat die Länge $\sin \alpha$. Entsprechend ist $\cos \alpha$ die x-Koordinate von P.

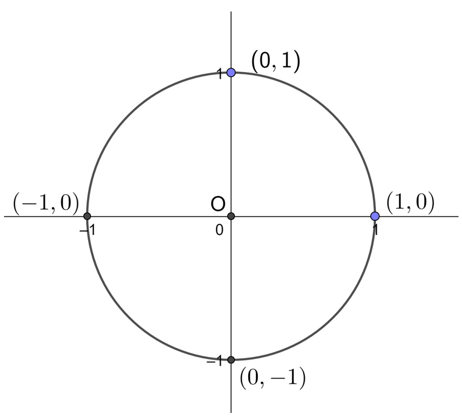


Der Vorteil dieser Interpretation ist, dass man $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ jetzt auch für Winkel festlegen kann, die nicht notwendig zwischen $0°$ und $90°$ liegen:



Jetzt liegt der Winkel α zwischen $90°$ und $180°$. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punkts P weiter mit $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, dann sehen wir, dass $\sin\alpha$ immer noch positiv ist (weil P oberhalb der x-Achse liegt), $\cos\alpha$ dagegen negativ (weil P links von der y-Achse liegt.

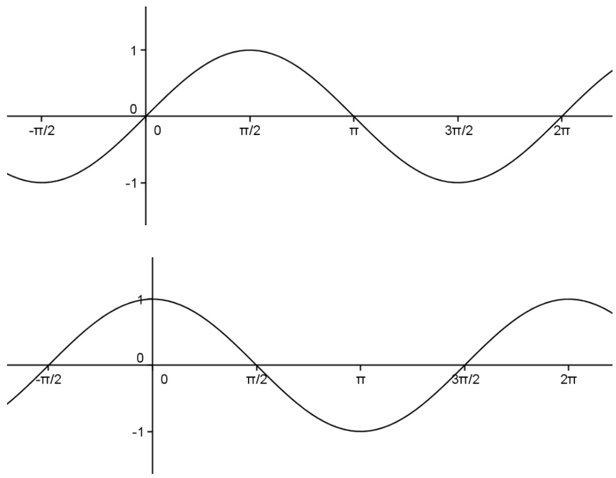
Für Winkel, welche Vielfache von $\frac{\pi}{2} = 90°$ sind, kann man jetzt die Werte der Sinus- und Kosinusfunktion am Einheitskreis ablesen. Ist der Winkel $90°$, hat P die Koordinaten $P(0|1)$, also ist $\cos 90° = 0$ und $\sin 90° = 1$. Ist $\alpha = 180°$, hat P die Koordinaten $P(-1|0)$, folglich ist $\cos 180° = -1$ und $\sin 180° = 0$. Für $\alpha = 270°$ hat P die Koordinaten $P(0|-1)$, folglich ist $\cos 270° = 0$ und $\sin 270° = -1$.



Benutzt man Bogenmaß, erhält man so die folgende Wertetabelle:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Erweitert man diese Tabelle mit Hilfe eines Taschenrechners, dann erhält man die folgenden Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion:



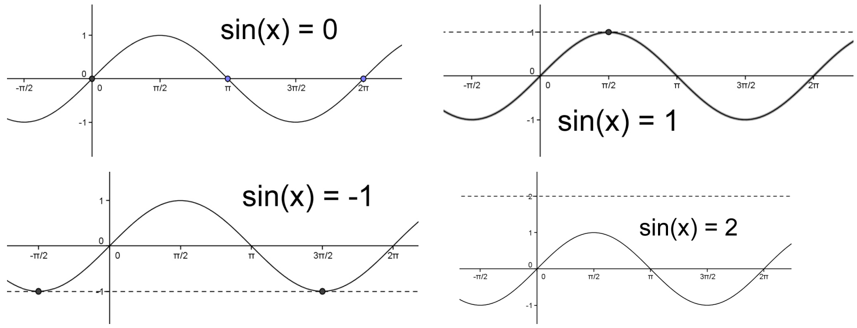
Diese Schaubilder muss man kennen; sie werden im Abitur regelmäßig verlangt. Wichtig ist zu wissen, dass die Sinuskurve im Ursprung beginnt, der Kosinus dagegen y-Achsenabschnitt 1 hat. Weiter nehmen beide Funktionen nur Werte zwischen -1 und 1 an, und ab $x = 2\pi$ (das entspricht dem Vollwinkel $\alpha = 360°$) wiederholen sich die Werte, weil der Punkt P im Einheitskreis dann einmal durch den Kreis gelaufen ist.

Wenn man sich die Schaubilder gemerkt hat, kann man an ihnen die Stellen ablesen, an denen Sinus und Kosinus die Werte -1, 0 oder $+1$ annehmen. Für alle anderen Werte kann man den Taschenrechner benutzen (aber selbst mit Taschenrechner muss man bei manchen Aufgaben auf die Schaubilder zurückgreifen).

Trigonometrische Gleichungen. Gleichungen, in denen die Funktionen $\sin x$ oder $\cos x$ auftauchen, heißen trigonometrische Gleichungen. Die Grundgleichungen

$$\sin(x) = 0, \pm 1 \quad \text{und} \quad \cos(x) = 0, \pm 1$$

muss man im Standardintervall $[0; 2\pi]$ durch "Ablesen" lösen können: man skizziert $f(x) = \sin x$ bzw. $g(x) = \cos(x)$ und liest ab, an welchen Stellen diese Funktionen die Werte -1, 0 und -1 annehmen.



Die Lösungen dieser Gleichungen sind also gegeben durch

$$\begin{array}{rcrl}
\sin(x) & = & 0 & x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi \\
\sin(x) & = & 1 & x_1 = \frac{\pi}{2} \\
\sin(x) & = & -1 & x_1 = \frac{3\pi}{2} \\
\sin(x) & = & 2 & \text{keine Lösung}
\end{array}$$

Achtung: $\cos(x) = 0$ fragt nach den Nullstellen von $y = \cos(x)$, also nach $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, während $x = \cos(0)$ nach dem Funktionswert der Kosinusfunktion an der Stelle $x_1 = 0$ fragt: $\cos(0) = 1$. Wichtig ist zu wissen, dass $\sin(x) = c$ für $c > 1$ und $c < -1$ keine Lösungen hat: Sinus- und Kosinusfunktion nehmen nur Werte zwischen -1 und 1 an.

Übungen

(1) Löse die folgenden Gleichungen für $0 \le x \le 2\pi$.

a) $2\sin x = 0$ b) $\cos x = 1$

c) $\cos x = -1$ d) $\cos x = 2$

(2) Löse die folgenden Gleichungen mit dem Satz vom Nullprodukt (alles auf eine Seite, dann Ausklammern):

a) $\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$ b) $\sin(x) \cdot (\cos(x) - 1) = 0$

c) $\cos(x) \cdot \sin(x) = 2\cos(x)$ d) $(\sin(x))^2 = 3\sin(x)$

Lösungen.

(1) Löse die folgenden Gleichungen für $0 \le x \le 2\pi$.

(a) Division durch 2 ergibt $\sin x = 0$ mit den Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$.

(b) $\cos x = 1$ hat die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$.

(c) $\cos x = -1$ hat die Lösung $x_1 = \pi$.

(d) $\cos x = 2$ hat keine Lösung.

(2) Löse die folgenden Gleichungen mit dem Satz vom Nullprodukt (alles auf eine Seite, dann Ausklammern):

(a) Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $\sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = 0$; dies liefert $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$ und $x_5 = \frac{3\pi}{2}$.

(b) Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $\sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = 1$; dies liefert $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$ (die beiden Lösungen der zweiten Gleichung sind schon Lösungen der ersten).

(c) $\cos(x)\sin(x) - 2\cos(x) = \cos(x)(\sin(x) - 2) = 0$ liefert $\cos x = 0$ (also $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2}$) oder $\sin(x) = 2$, was aber keine Lösungen hat.

(d) $0 = (\sin(x))^2 - 3\sin(x) = \sin(x)(\sin(x) - 3) = 0$. Die gleichung $\sin(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ und $x_3 = 2\pi$; die Gleichung $\sin(x) = 3$ hat keine Lösung.