BINOMIALKOEFFIZIENTEN

FRANZ LEMMERMEYER

Heute erklären wir die Grundlagen der Kombinatorik, soweit sie für die Schulmathematik relevant ist.

Permutationen

1. *Wie viele Möglichkeiten gibt es für die ersten drei Plätze bei einem Wettrennen von* 10 *Personen?*

Die Antwort darauf gibt die Produktregel: Für den ersten Platz gibt es 10 Möglichkeiten, für den zweiten nur noch 9 (weil man nicht gleichzeitig Erster und Zweiter werden kann) und für den dritten 8; insgesamt gibt es also $10 \cdot 9 \cdot 8$ Möglichkeiten.

Ganz entsprechend beantwortet man die folgende Frage:

2. *Auf wieviele Arten kann man drei Dinge anordnen?*

Offenbar gibt es drei Möglichkeiten für das erste, zwei für das zweite und eine für das dritte Ding. Insgesamt gibt es daher $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Wenn wir die drei Dinge A, B, C nennen, dann können wir diese Anordnungen (man nennt sie auch Permutationen: jede Vertauschung wird gezählt) alle aufschreiben:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Weil Produkte wie $3 \cdot 2 \cdot 1$ sehr oft vorkommen, führt man eine Bezeichnung für sie an: wir schreiben

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

(sprich: n Fakultät). Für kleine Werte von n erhält man

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720

Übungen

(1) Berechne.

a) $5!$ b) $2! \cdot 3!$

c) $\dfrac{5!}{3!}$ d) $\dfrac{11!}{9!}$

(2) Wie viele vierstellige PINs gibt es?

Wie viele davon beginnen nicht mit einer 0?

(3) Auf wie viele Arten kann man 5 Bücher anordnen?

(4) Wie viele mögliche Autokennzeichen gibt es für den Ostalbkreis, wenn nach AA genau drei Buchstaben und dann genau 4 Ziffern folgen (die natürlich keine führenden Nullen haben dürfen)?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn nach AA maximal drei Buchstaben und maximal 4 Ziffern folgen?

Kombinationen

3. *Auf wieviele Arten kann man zwei Personen aus zehn auswählen?*

Wir wollen zuerst die Frage beantworten, auf wie viele Arten man zwei aus drei Personen A, B und C auswählen kann. Offenbar läuft die Wahl von zweien auf den Ausschluss der dritten Person hinaus, also muss es drei Möglichkeiten geben. Diese sind AB, AC und BC (d.h. hier wird C, bzw. B oder A nicht gewählt).

Andererseits kann man so vorgehen: für die Wahl der ersten Person hat man 3 Möglichkeiten, für die der zweiten 2. Das sind $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten, bei denen wir aber die Reihenfolge gezählt haben, auf die es gar nicht ankommt: bei unserer Zählweise sind die Möglichkeiten AB und BA als verschieden gezählt worden. Weil wir jede Möglichkeit doppelt gezählt haben, gibt es also nur $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ verschiedene Möglichkeiten.

Ebenso kann man bei Frage 3. vorgehen: Für die erste Person gibt es 10, für die zweite 9 Möglichkeiten. Allerdings haben wir dabei jede Möglichkeit doppelt gezählt, denn wenn man A und B ausgewählt hat, hat man die gleichen Personen wie bei B und A. Es kommt hier auf die Reihenfolge der Auswahl nicht an (man spricht dann, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt, von Kombinationen). Insgesamt haben wir also $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Möglichkeiten.

Allgemein kann man aus n verschiedenen Dingen zwei auf $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Arten auswählen.

4. *Auf wieviele Arten kann man drei Personen aus zehn auswählen?*

Hier kann man die Personen, wenn man die Reihenfolge, in der sie ausgewählt werden, unterscheidet, auf $10\cdot 9\cdot 8$ Arten bestimmen. Wenn man nun A, B und C gezogen hat, hat man aber jede der $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ Möglichkeiten

$$\text{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.}$$

als verschieden gezählt. Wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommen soll, müssen wir unser Ergebnis also durch die Anzahl der Möglichkeiten teilen, mit der man drei Personen anordnen kann. Es gibt daher

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

Möglichkeiten.

Allgemein kann man aus n verschiedenen Dingen drei auf

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

Möglichkeiten auswählen, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

Entsprechend kann man vier Dinge aus n auf

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Arten auswählen; man hat $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$ Möglichkeiten, wenn man die Reihenfolge berücksichtigt; weil es $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ Möglichkeiten gibt, diese vier ausgewählten Dinge anzuordnen, hat man jede Möglichkeit $4!$-mal gezählt.

Die oben auftretenden Zahlen nennt man Binomialkoeffizienten und bezeichnet sie mit $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k). Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} &= \frac{n}{1} = n, \\
\binom{n}{2} &= \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)}{2}, \\
\binom{n}{3} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \\
\binom{n}{4} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \ldots .
\end{aligned}$$

Übungen

(1) Berechne folgende Binomialkoeffizienten:

a) $\binom{4}{2}$ b) $\binom{5}{2}$
c) $\binom{5}{3}$ d) $\binom{6}{2}$
e) $\binom{7}{6}$ f) $\binom{8}{3}$

(2) Berechne

a) $\binom{4}{1}$ b) $\binom{4}{3}$
c) $\binom{5}{1}$ d) $\binom{5}{4}$
e) $\binom{8}{1}$ f) $\binom{8}{7}$

Was fällt auf?

Zeige allgemein, dass $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ ist.

(3) Auf wieviel Arten kann man ein Team von 4 Leuten aus einer Gruppe von 10 Personen auswählen?

(4) (TR) Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Lottoschein anzukreuzen, also 6 aus 49 Zahlen auszuwählen?

Werfen einer Münze

Beim Werfen einer Münze geht es in der Regel darum, ob Zahl oder Wappen kommt. Wirft man sie fünfmal, dann gibt es 10 Möglichkeiten dafür, dass genau zwei Mal Wappen auftritt:

WWZZZ, WZWZZ, WZZWZ, WZZZW, ZWWZZ,

ZWZW, ZWZZW, ZZWWZ, ZZWZW, ZZZWW.

Wie kann man diese Pfade zählen, ohne sie alle hinzuschreiben? Wir müssen zwei W und drei Z auf die Plätze 1, 2, 3, 4 und 5 verteilen. Der Pfad WZZWZ entsteht, wenn man dei beiden W auf die Plätze 1 und 4 setzt (damit stehen an den andern Plätzen automatisch drei Z). Es gibt also ebenso viele Pfade, wie es Möglichkeiten gibt, zwei Plätze aus 5 auszuwählen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt (ob man das erste W auf Platz 1 und das zweite auf Platz 4 setzt oder andersehrum läuft auf den gleichen Pfad hinaus). Es gibt also $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10$ solcher Pfade.

Betrachtet man alle Pfade der Länge n mit genau k Wappen, so muss man aus den n Plätzen k auswählen, auf denen das W stehen soll. Also gilt:

Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Pfade der Länge n mit k Wappen.

Übungen

(1) Schreibe alle Pfade der Länge 4 mit zwei Wappen und zwei Zahlen auf. Vergleiche die Anzahl mit $\binom{4}{2}$.

(2) Schreibe alle Pfade der Länge 5 mit drei Wappen und zwei Zahlen auf. Vergleiche mit den Pfaden der Länge 5, die drei Zahlen und zwei Wappen haben.

5. *Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen Kopf und Wappen gleich oft?*

Ein möglicher Pfad ist WWWZZZ; nach der Pfadregel ist die Wahrscheinlichkeit dafür $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$. Alle andern Pfade der Länge 6 haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. Die gesuchte Wahrsscheinlichkeit $p(3W)$ für genau 3 Wappen ist also

$$\text{Anzahl der Pfade} \cdot \text{Wahrscheinlichkeit eines Pfads.}$$

Im vorliegenden Fall gibt es $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ Pfade, folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(3W) = 20 \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{16}.$$

Übungen

(1) Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft Wappen erscheint. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Hinweis. Damit ist gemeint, dass man die Wahrscheinlichkeiten für alle Möglichkeiten von X bestimmt. Offenbar kann X die Werte 0, 1, ..., 5 annehmen, weil die Anzahl der Wappen bei fünfmaligem Werfen eine dieser Zahlen ist. Jetzt muss man die Tabelle

k	0	1	2	3	4	5
$p(X = k)$						

ausfüllen.

Dabei bezeichnet $p(X = 2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X = 2$ ist, dass die Anzahl der Wappen also gleich 2 ist. Die Anzahl aller Pfade mit genau zwei Wappen ist, wie wir oben gesehen haben, $\binom{5}{2} = 10$; die Wahrscheinlichkeit eines Pfads wie z.B. $WWZZZ$ ist $p(WWZZZ) = (\frac{1}{2})^5 = 32$. Also ist $p(X = 2) = \frac{10}{32}$.

(2) Eine faire Münze wird 4 Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft Zahl erscheint. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

(3) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer verbeulten Münze Wappen erscheint, ist $\frac{2}{5}$. Diese Münze wird 4 Mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der geworfenen Wappen angibt.

(4) Ein fairer Würfel wird 3 Mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der Sechser angibt.

(5) Ein Würfel wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) kommt keine 6?

(b) würfelt man genau eine 6?

(c) würfelt man beim ersten Wurf eine 6?

(d) würfelt man beim ersten und zweiten Wurf eine 6?

(e) würfelt man genau zwei Sechser?

(f) würfelt man mindestens zwei Sechser?

(6) Ein Würfel wird 12 Mal geworfen. Schreibe einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher genau drei Mal eine 6 geworfen wird.

(7) Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Welche Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeit $p = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{2})^5$?

(8) Ein fairer Würfel wird geworfen. Gib ein Ereignis an, das die Wahrscheinlichkeit $p = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^4$ besitzt. Wie oft wurde gewürfelt?

Übungen

(1) Berechne.

  (a) $5! = 120$

  (b) $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

  (c) Erst kürzen, dann multiplizieren!

  $\frac{5!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 5 \cdot 4 = 20.$

  (d) $\frac{11!}{9!} = 11 \cdot 10 = 110.$

(2) Für jede Stelle gibt es 10 Möglichkeiten; bei vier Stellen sind es daher $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$.

Soll die PIN nicht mit einer 0 beginnen, gibt es für die erste Ziffer 9, für alle andern immer noch 10 Möglichkeiten, also insgesamt $9 \cdot 10^3 = 9000$ Möglichkeiten.

(3) Es gibt $5! = 120$ Möglichkeiten.

(4) Für die drei Buchstaben gibt es offenbar $26\cdot26\cdot26$ Möglichkeiten, wenn wir die Buchstaben Ä, Ö und Ü ausschließen.

Für die 4 Ziffern gibt es, wenn führende Nullen nicht erlaubt sind, $9 \cdot 10^3 = 9000$ Möglichkeiten. Insgesamt sind dies $26^3 \cdot 9000 \approx 1,58 \cdot 10^8$, also fast 160 Millionen Möglichkeiten.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für maximal drei Buchstaben? Offenbar gibt es 26 Möglichkeiten für einen, 26^2 für zwei und 26^3 für drei Buchstaben, also insgesamt $26 + 26^2 + 26^3 = 18.278$ Möglichkeiten.

Für die maximal 4 Ziffern gibt es, wenn führende Nullen nicht erlaubt sind, 9 Möglichkeiten bei einer Ziffer, $9\cdot10 = 90$ Möglichkeiten bei zwei Ziffern usw., also insgesamt $9+90+900+9000 = 9999$ Möglichkeiten. Damit hat man insgesamt $18.278 \cdot 9000 \approx 1,83 \cdot 10^8$ Möglichkeiten.

Übungen

(1) Binomialkoeffizienten:

a) $\binom{4}{2} = 6$ b) $\binom{5}{2} = 10$
c) $\binom{5}{3} = 10$ d) $\binom{6}{2} = 15$
e) $\binom{7}{6} = 7$ f) $\binom{8}{3} = 56$

(2) Binomialkoeffizienten:

a) $\binom{4}{1} = 4$ b) $\binom{4}{3} = 4$
c) $\binom{5}{1} = 5$ d) $\binom{5}{4} = 5$
e) $\binom{8}{1} = 8$ f) $\binom{8}{7} = 8$

Allgemein gilt (kürzen!)

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-1) \cdots 2 \cdot 1} = n = \binom{n}{1}.$$

(3) Es gibt $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ Möglichkeiten.

(4) Hier sind es $\binom{49}{6} \approx 1,4 \cdot 10^6$ Möglichkeiten.

Übungen

(1) Dies sind WWZZ, WZWZ, WZZW, ZWWZ, ZWZW, ZZWW, also $\binom{4}{2} = 6$ Pfade.

(2) Dies sind
WWWZZ, WWZWZ, WWZZW, WZWWZ, WZWZW,
WZZWW, ZWWWZ, ZWWZW, ZWZWW, ZZWWW,
also $\binom{5}{3} = 10$ Pfade.

Die entsprechenden Pfade für drei Zahlen und zwei Wappen erhält man, wenn man oben die Buchstaben Z und W vertauscht.

Übungen

(1) Die Wahrscheinlichkeit für $k = 0$ Wappen ist $p(ZZZZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

Die Wahrscheinlichkeit für genau 1 Wappen ist $p(WZZZZ) + p(ZWZZZ) + p(ZZWZZ) + p(ZZZWZ) + p(ZZZZW) = \frac{5}{32}$. Schneller geht es so: jeder Pfad hat Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$, und die Anzahl der Pfade ist $\binom{5}{1} = 5$, also ist $p(X = 1) = \frac{5}{32}$.

k	0	1	2	3	4	5
$p(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Zur Kontrolle berechnen wir die Summe aller Wahrscheinlichkeiten; wenn wir keinen Fall vergessen haben, muss diese Summe $= 1$ sein. In der Tat ist $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=1$.

(2) Wie eben findet man

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Auch hier ist $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=1$.

(3) X bezeichne die Anzahl der geworfenen Wappen. $X = 0$ bedeutet dann, dass kein Wappen kommt, d.h. es geht um den Pfad $ZZZZ$ mit vier Mal Zahl. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist , weil Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ erscheint, gleich $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=(\frac{3}{5})^4$; dies ist zusammengefasst in $p(X=0)=p(ZZZZ)=(\frac{3}{5})^4=0,1296$.

Entsprechend ist $p(X = 1)$ diw Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl X der geworfenen Wappen gleich 1 ist, dass also genau ein Wappen geworfen wird. Hier gibt es die Pfade WZZZ, ZWZZ, ZZWZ und ZZZW (keine Überraschung: das sind genau $\binom{4}{1}$ Pfade); jeder einzelne Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3$. Genauer:

- $p(WZZZ)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3$,
- $p(ZWZZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3$,
- $p(ZZWZ)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3$,
- $p(ZZZW)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3$.

Bei solchen Problemen ist die Wahrscheinlichkeit also gleich der Anzahl der Pfade (hier 4) mal die Wahrscheinlichkeit eines Pfads. Oder ganz kurz: $p(X=1)=4\cdot\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^3=0,0216$.

Wie sieht es mit $p(X = 2)$ aus, also der Wahrscheinlichkeit für genau zwei Wappen? Hier muss es $\binom{4}{2}$ Pfade geben, und diese sind WWZZ, WZWZ, WZZW, ZWWZ, ZWZW, ZZWW. Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $(\frac{2}{5})^2\cdot(\frac{3}{5})^2$, und weil es 6 davon gibt, ist $p(X=2)=6\cdot(\frac{2}{5})^2\cdot(\frac{3}{5})^2$.

Jetzt sollte klar sein, dass $p(X = 3) = 4 \cdot (\frac{2}{5})^3 \cdot \frac{3}{5}$ ist: es gibt $\binom{4}{3} = 4$ Pfade mit drei Mal Wappen (nämlich WWWZ, WWZW, WZWW und ZWWW), und jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit $(\frac{2}{5})^3 \cdot \frac{3}{5}$.

Schließlich ist $p(X = 4) = p(WWWW) = (\frac{2}{5})^4$. Damit haben wir folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist damit wieder 1.

(4) Man kann keinen, einen, zwei oder drei Sechser werfen.

- $p(\text{keine } 6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$.
- $p(\text{eine } 6) = p(6KK)+p(K6K)+p(KK6) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$.
- $p(\text{zwei Mal } 6) = p(66K)+p(6K6)+p(K66) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$.
- $p(666) = \frac{1}{216}$.

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1.

(5) Ein Würfel wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) $p(\text{keine } 6) = (\frac{5}{6})^5$.

(b) $p(\text{eine } 6) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^4 = (\frac{5}{6})^5$.

(c) $p(6) = \frac{1}{6}$.

(d) $p(66) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

(e) $p(\text{zwei Mal } 6) = \binom{6}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^3 = \frac{1875}{7776}$.

(f) Gegenereignis: $p(\text{mindestens zwei Sechser})$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit $1 - p(\text{höchstens ein Sechser}) = 1 - (\frac{5}{6})^5 - (\frac{5}{6})^5 \approx 0,196$.

(6) $p(\text{drei Sechser}) = \binom{12}{3} \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^9$.

(7) Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Welche Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeit $p = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{2})^5$?

(8) Der Ausdruck $p = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^4$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei fünfmaligem Würfeln genau eine Sechse kommt (oder genau eine Eins usw.)