MATHEMATIK G10A WOCHE 7

20.05.2020

(1) Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = 3x^2 + 2x^3$$
$$g(x) = \frac{5x}{4} - \frac{4}{5x}$$
$$h(x) = a\sqrt{x} + 2a^2x^2$$

(2) Bestimme Tangente und Normale an das Schaubild von $f(x) = -\frac{2}{x} + x$ an der Stelle $x = 1$.

In welchen Punkten schneidet die Tangente die Koordinatenachsen?

Bestimme den Inhalt des Dreiecks, das diese Schnittpunkte zusammen mit dem Ursprung bilden.

(3) Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

(4) In welchem Punkt hat die Tangente an das Schaubild von $f(x) = 2\sqrt{x}$ die Steigung $m = \frac{1}{5}$?

Zeige, dass die Normale in keinem Punkt Steigung $\frac{1}{5}$ besitzt.

Lösungen

(1) Die Ableitungen sind

$$f'(x) = 6x + 6x^2$$
$$g'(x) = \frac{5}{4} + \frac{4}{5x^2}$$
$$h'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 4a^2x$$

(2) Bestimme Tangente und Normale an das Schaubild von $f(x) = -\frac{2}{x} + x$ an der Stelle $x = 1$.

In welchen Punkten schneidet die Tangente die Koordinatenachsen?

Bestimme den Inhalt des Dreiecks, das diese Schnittpunkte zusammen mit dem Ursprung bilden.

Es ist

- $y = f(1) = -2 + 1 = -1$;
- $f'(X) = \frac{2}{x^2} + 1$;
- $m = f'(1) = 3$

Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $-1 = 3 \cdot 1 + b$, also $b = -4$ und damit

$$t : y = 3x - 4.$$

Die Steigung der Normalen ist $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$; es folgt

$$n : y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen sind $S(0|-4)$ und $N(\frac{4}{3}|0)$. Das Dreieck hat Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$.

(3) Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4.$$

Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 2) = 0$ und Satz vom Nullprodukt ergibt $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Extrempunkte: $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 1$.

- $x_1 = 0$, $y_1 = f(0) = 0$, $f''(0) = -4 < 0$, also $H(0|0)$;
- $x_2 = -1$, $y_2 = f(-1) = -1$; $f''(-1) = 8 > 0$, also $H(-1|-1)$;
- $x_3 = +1$, $y_2 = f(1) = -1$; $f''(1) = 8 > 0$, also $H(1|-1)$.

Wendepunkte: $12x^2 - 4 = 0$ ergibt $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. $f(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{9}$. Also $W_{1,2} = (\pm\sqrt{\frac{1}{3}}| - \frac{5}{9})$.

(4) Es ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; der Ansatz $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{5}$ ergibt nach Quadrieren $\frac{1}{x} = \frac{1}{25}$, also $x = 25$. Der gesuchte Punkt ist also $P(25|10)$.

Normalensteigung ist $m' = -\frac{1}{m}$; aus $-\frac{1}{m} = \frac{1}{5}$ folgt $m = -5$; die Gleichung $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = -5$ hat aber keine Lösung, weil $\sqrt{x} \geq 0$ ist.