# MATHEMATIK G10A WOCHE 3

30.03.2020

## Teil 1. Wiederholung

(1) Bestimme die erste Ableitung folgender Funktionen und vereinfache so weit wie möglich.

$$
\begin{aligned}
&a) \qquad & f(x) &= \frac{x^3}{3} - \sqrt{2} \\
&b) \qquad & g(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{x^4}{2} \\
&c) \qquad & h(x) &= \frac{3x^2}{x} \\
&d) \qquad & k(x) &= x^{2n}
\end{aligned}
$$

(2) Bestimme Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds der Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1.$$

(3) In welchem Punkt ist die Tangente an das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ parallel zur Geraden $y = 2 - x$?.

Prüfe außerdem, ob $y = \frac{1}{2}x + 1$ eine Normale an das Schaubild von $f$ ist.

## Teil II. Textaufgaben

Diese Woche gibt es „neuen“ Stoff in dem Sinne, dass wir jetzt die Differentialrechnung auf „realitätsnahe“ Probleme anwenden. Diese „realitätsnahen“ Probleme haben mit der Realität allerdings nichts zu tun – sie sind ein Konstrukt der Didaktik und der Bildungsforschung mit dem einzigen Ziel, Deutschland beim PISA-Test nach vorn zu bringen.

Im Wesentlichen geht es um eine Funktion, die irgendwas beschreibt, und um Fragen, die auf Funktionswerte, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte oder Tangenten hinauslaufen. Die eigentliche Kunst liegt nicht in der Mathematik, sondern darin, die Fragen in Gleichungen zu übersetzen.

Hier erst einmal die Aufgabe:

Die Funktion $h(t) = -0,1t^4 + 20t^2$ beschreibt die Höhe eines Baums von der Pflanzung bis zum Erreichen der maximalen Höhe an. Dabei bezeichnet $t$ die Zeit nach der Pflanzung in Jahren und $h(t)$ die Höhe des Baums in cm.

a) Bestimme die Höhe des Baums nach 2 Jahren und nach 8 Jahren.

Mit welcher mittleren Geschwindigkeit ist der Baum zwischen 2 und 8 Jahren nach Pflanzung gewachsen?

b) Berechne die maximale Höhe des Baums und gib an, wie lange der Baum wächst.

Skizziere das Schaubild von $f$ von der Pflanzung bis zum Erreichen der maximalen Höhe in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Ermittle durch Rechnung, wann der Baum am schnellsten wächst, und gib diese Wachstumsgeschwindigkeit an.

d) Die Höhe eines zweiten Baums wird durch die Funktion

$$k(t) = -2t^3 + 30t^2$$

beschrieben ($t$ in Jahren, $k(t)$ in cm).

Berechne, wann beide Bäume dieselbe Höhe besitzen.

Ermittle rechnerisch, wann die beiden Bäume gleich schnell wachsen.

Wie hat man hier nun vorzugehen? Zu Beginn macht man sich die Einheiten klar: $t$ ist in Jahren, die Höhe $h(t)$ in cm gemessen.

Diese Erkenntnis reicht, um a) zu lösen: hier sind offenbar zwei Zeiten $t$ gegeben, nämlich $t = 2$ und $t = 6$, und gesucht ist die Höhe $h(t)$ des Baumes zu diesen Zeiten. Man setzt also ein (Taschenrechner) und schreibt die Antwort hin, und zwar **mit Einheiten**, weil das andernfalls Punkte kostet.

b) Zum Berechnen der maximalen Höhe müssen wir ausrechnen, wo $h(t)$ maximal wird, das Schaubild von $h$ also einen Hochpunkt besitzt. Dazu setzt man $h'(t) = 0$ (Lösung sollte $t = 10$) sein und rechnet danach die Höhe des Baums zu diesem Zeitpunkt aus. Antwortsätze mit Einheiten nicht vergessen!

Das Schaubild zeichnet man, indem man den TR eine Wertetabelle für die ersten 10 Jahre (Erreichen der maximalen Höhe) machen lässt.

c) Die Änderungsrate der Höhe ist die Ableitung $h'(t)$: wenn diese groß ist, wächst der Baum schnell, wenn sie 0 ist, wächst er nicht mehr. Wir müssen also herausbekommen, wann $h'(t)$ am größten ist, also das Maximum von $h'$ bestimmen. Dazu muss man $h'$ ableiten und gleich 0 setzen. Die Lösung ($t = 5$) entspricht dem Punkt im Schaubild, an dem $h$ am schnellsten wächst. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist dann der Wert von $h'$ an dieser Stelle bestimmen; die Einheit der Wachstumsgeschwindigkeit ist dieselbe wie die Einheit der Steigung einer Geraden durch zwei Punkte des Schaubilds: solche Steigungen bestimmt man als Differenz der $y$-Koordinaten (Einheit cm) geteilt durch die Einheit der $t$-Koordinaten (Jahre), d.h. die achstumsgeschwindigkeit hat die Einheit cm/Jahr.

d) Für die gleiche Höhe muss man $h(t) = k(t)$ setzen, für die gleiche Wachstumsgeschwindigkeit müssen die Ableitungen gleich sein.

Zur Kontrolle: das Schaubild von $h$ mit Maximum und maximaler Wachstumsgeschwindigkeit.