MATHEMATIK G10A WOCHE 2

23.03.2020

(1) Bestimme die beiden ersten Ableitungen der folgenden Funktionen unds vereinfache soweit wie möglich.

$$f(x) = \frac{9}{18x} - \frac{9}{18x^2}$$
$$g(t) = 8\sqrt{t} + 4t^2$$
$$h(x) = a\sqrt{x} + \sqrt{a} \cdot x$$

(2) Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = x^2 - 4ax + 3a^2.$$

Die Funktion f_1 ist diejenige, die man aus f_a durch Einsetzen von $a = 1$ erhält.

a) Bestimme Nullstellen und den Extrempunkt des Schaubilds von f_1.

b) Bestimme allgemein Nullstellen und den Extrempunkt des Schaubilds von f_a.

Hinweis: Zum Lösen von $f_a(x) = 0$ kann man entweder die *abc*-Formel benutzen oder den Satz von Vieta.

c) Für welche Werte von a ist $x_1 = 5$ Nullstelle?

d) Für welchen Wert von a hat der Tiefpunkt die x-Koordinate $x = 5$?

(3) Bestimme die Steigung der folgenden Geraden:

a) $2x + 3y = 5$

b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

Hinweis: Löse die Gleichungen nach y auf und lies die Steigung ab.

(4) a) Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch $P(2|-1|5)$ und $Q(4|0|6)$.

b) Bestimme b und c so, dass $R(3|b|c)$ auf g liegt.

c) Welche Punkte auf g sind von R doppelt so weit entfernt wie Q?

d) Welche Punkte auf g sind von R doppelt so weit entfernt wie von Q?

(5) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(0|12)$.

a) Bestimme die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks.

b) Bestimme die Gleichungen der drei Seitenhalbierenden (die Strecken von einem Eck zum Mittelpunkt der jeweils gegenüberliegenden Seiten) des Dreiecks (entweder in der Koordinatenform $y = mx + b$ oder in Vektorform).

c) Zeige, dass alle drei Seitenhalbierenden sich in einem Punkt S schneiden und bestimme die Koordinaten von S.

Lösungen

(1) Bestimme die beiden ersten Ableitungen der folgenden Funktionen unds vereinfache soweit wie möglich.

$$f(x) = \frac{9}{18x} - \frac{9}{18x^2} \qquad f'(x) \qquad = -\frac{1}{2x^2} - x$$

$$g(t) = 8\sqrt{t} + 4t^2 \qquad g'(t) \qquad = \frac{4}{\sqrt{t}} + 8t$$

$$h(x) = a\sqrt{x} + \sqrt{a} \cdot x \qquad h'(x) \qquad = \frac{a}{2\sqrt{x}} + \sqrt{a}$$

(2) Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = x^2 - 4ax + 3a^2.$$

Die Funktion f_1 ist diejenige, die man aus f_a durch Einsetzen von $a = 1$ erhält.

a) Wir haben $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$.

Nullstellen: $f_1(x) = (x-1)(x-3)$, also $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

Extrempunkt: $f_1'(x) = 2x - 4 = 0$, $f_1''(x) = 2 > 0$, $f_1(2) = 3$, also $T(2|3)$.

b) Hier müssen wir $f_a(x) = x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$ setzen.

Vieta: $x^2 - 4ax + 3a^2 = (x-a)(x-3a)$, also $x_1 = a$ und $x_2 = 3a$.

abc-Formel: $a = 1$m $b = -4a$ und $c = 3a^2$ liefert

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot 3a^2}}{2} = \frac{4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{4a \pm 2a}{2},$$

also wieder $x_1 = a$ und $x_2 = 3a$.

c) Entweder ist $x_1 = a = 5$ oder $x_2 = 3a = 5$; dies liefert die beiden Werte $a_1 = 5$ und $a_2 = \frac{5}{3}$.

d) Der Tiefpunkt liegt an der Stelle mit $f_a'(x) = 2x - 4a = 0$, also bei $x = 2a$. Wegen $f_a(2a) = 4a^2 - 8a^2 + 3a^2 = -a^2$ ist also $T(2a| - a^2)$. Der Tiefpunkt hat x-Koordinate 5, wenn $2a = 5$, also $a = \frac{5}{2}$ ist.

(3) Wir müssen nach y auflösen:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3y &= -2x + 5 \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Also hat diese Gerade Steigung $m = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} &= 1 \\ \frac{y}{4} &= -\frac{x}{3} + 1 \\ y &= -\frac{4}{3} + 4 \end{aligned}$$

Also hat diese Gerade Steigung $-\frac{4}{3}$.

(4) a) Stützvektor zeigt auf einen Punkt, Richtungsvektor verbindet zwei Punkte.

$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Punktprobe mit R: $\begin{pmatrix} 3 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die obere Gleichung ($x_1$) ergibt $t = \frac{1}{2}$ und damit $b = -\frac{1}{2}$ und $c = \frac{11}{2}$. Beachte, dass R der Mittelpunkt von PQ ist; damit hätte man b und c auch finden können.

c) Skizze machen: P gehört zu $t = 0$, Q zu $t = 1$ und R zu $t = \frac{1}{2}$. Die gesuchten Punkte gehören zu $t = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{3}{2}$, also $A(1| - \frac{3}{2}|\frac{9}{2})$ und $B(5|\frac{1}{2}|\frac{13}{2})$.

d) Eine Skizze liefert $t = \frac{3}{2}$, also $A(1| - \frac{3}{2}|\frac{9}{2})$, und und $t = \frac{5}{6}$, also $D(\frac{22}{6}| - \frac{1}{6}|\frac{35}{6})$.

(5) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(0|12)$.

a) Die Mittelpunkte der Seiten sind $M_a(3|6)$, $M_b(0|6)$ und $M_c(3|0)$.

Gerade	Parametergleichung	Koordinatengleichung
AM_a	$\vec{x} = t\binom{3}{6}$	$y = 2x$
BM_b	$\vec{x} = \binom{6}{0} + t\binom{-6}{6}$	$y = 6 - x$
CM_c	$\vec{x} = \binom{0}{12} + t\binom{3}{-12}$	$y = 12 - 4x$

Schneiden der beiden letzten Seitenhalbierenden liefert $6 - x = 12 - 4x$, also $x = 2$ und damit $S(2|4)$. Dieser Punkt liegt auch auf der ersten Geraden. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.