MATHEMATIK G10A WOCHE 1

16.03.2020

(1) Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = 2x^5 - 3x^2 + \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}$$
$$g(x) = \frac{7x}{3} - \frac{7}{3x}$$
$$h(x) = ax^4 + a^4x$$

(2) Bestimme Tangente und Normale an das Schaubild von f im Punkt P:

a) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$, $P(4|f(4))$.

b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$, $P(3|f(3))$.

c) $f(x) = (x-2)^2 + 4$, $P(2|f(2))$.

(3) Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der folgenden Funktion:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x.$$

(4) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 4ax + a^2 - 6$.

a) Bestimme a so, dass das Schaubild von f in $x = 1$ eine Nullstelle besitzt.

b) Bestimme a so, dass die Tangente an das Schaubild von f in $x_1 = 2$ Steigung 8 besitzt.

(5) Löse folgende Gleichungen.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$

c) $\sqrt{x} = 16$

d) $x^2 + 2 = \frac{15}{x^2}$

Lösungen

(1) Wir schreiben

$$f(x) = 2x^5 - 3x^2 + \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}$$
$$g(x) = \frac{7}{3} \cdot x - \frac{7}{3} \cdot x^{-1}$$
$$h(x) = ax^4 + a^4 x$$

und finden

$$f'(x) = 10x^4 - 6x + \sqrt{2}$$
$$g'(x) = \frac{7}{3} + \frac{7}{3}x^{-2} = \frac{7}{3} + \frac{7}{3x^2}$$
$$h'(x) = 4ax^3 + a^4$$

(2) Bestimme Tangente und Normale an das Schaubild von f im Punkt P:

a) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$, $P(4|f(4))$.

Hier ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, also $f(4) = 5$ und $m = \frac{1}{2}$; Einsetzen in $y = mx + b$ liefert $5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, also $b = 3$. Damit ist die Tangentengleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$.

b) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$, $P(3|f(3))$.

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, $f(3) = -1$, $m = -\frac{1}{3}$, damit $y = -\frac{1}{3}x$.

c) $f(x) = (x-2)^2 + 4$, $P(2|f(2))$.

Hier ergibt sich die Tangentengleichung $y = 0$ (P ist der Scheitelpunkt der Parabel, also muss die Tangente waagrecht sein).

(3) Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der folgenden Funktion:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x.$$

Nullstellen: $f(x) = 0$ ergibt nach Ausklammern und Nullproduktsatz $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 5$.

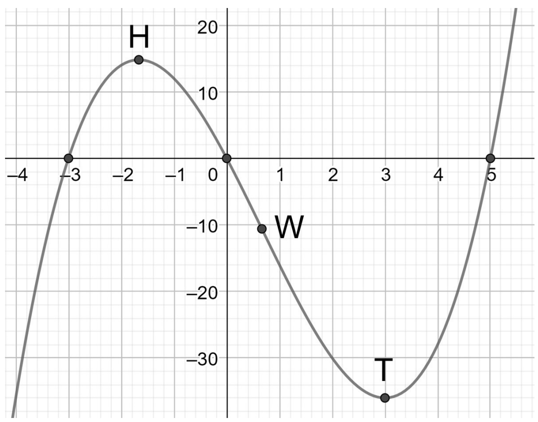
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 15$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ ergibt $x_4 = -\frac{5}{3}$ und $x_5 = 3$.

$$\begin{aligned} f(x_4) &= \tfrac{400}{27}, & f''(x_4) &= -14 < 0 \\ f(x_5) &= -36, & f''(x_5) &= 14 > 0. \end{aligned}$$

Also haben wir einen Hochpunkt $H(-\frac{5}{3}|\frac{400}{27})$ und einen Tiefpunkt $T(3|-36)$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ liefert $x_6 = \frac{2}{3}$. Wegen $f(\frac{2}{3}) = -\frac{286}{27}$ ist der Wendepunkt $W(\frac{2}{3}|-\frac{286}{27})$.



(4) a) Aus $0 = f(1) = 1 + 4a + a^2 - 6 = a^2 + 4a - 5 = (a-1)(a+5)$ folgt $a_1 = 1$ und $a_2 = -5$.

b) Es ist $f'(x) = 3x^2 + 4a$; aus $8 = f'(2) = 12 + 4a$ folgt $4a = -4$, also $a = -1$.

(5) Löse folgende Gleichungen.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ liefert $x_{1,2} = \pm 1$ und $x_{3,4} = \pm 2$.

b) $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x^2 + 2x - 8) = x(x-2)(x+4) = 0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$.

c) $\sqrt{x} = 16$ ergibt durch Quadrieren $x = 16^2 = 256$.

d) $x^2 + 2 = \frac{15}{x^2}$ ergibt nach Wegheben des Nenners

$$0 = x^4 + 2x^2 - 15 = (x^2 + 5)(x^2 - 3),$$

was auf $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ führt.