# MATHEMATIK G10A WOCHE 4

F. LEMMERMEYER, 25.01.2021

## 1. Tangenten und Normalen

Die *Normale* an das Schaubild einer Funktion $f$ in einem Punkt $P(a|f(a))$ ist diejenige Gerade durch $P$, welche auf die Tangente in $P$ senkrecht steht.

Ob zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen oder nicht, muss man an den Steigungen ablesen können, weil ein Abändern der $y$-Achsenabschnitte die Geraden nur parallel verschiebt, der Winkel zwischen ihnen also gleich bleibt. Um herauszufinden, wie die Steigungen orthogonaler Geraden miteinander zusammenhängen, betrachten wir eine Gerade $y = mx$ und deren Steigungsdreieck; dieses drehen wir dann um 90° und lesen daran die Steigung der orthogonalen Geraden ab.

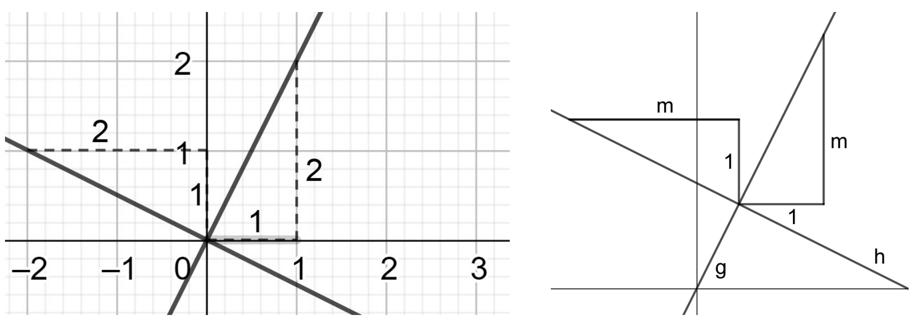


Abbildung 1. Orthogonale Geraden $y = 2x$ und $y = \frac{1}{2}x$ (links) bzw. $g$ und $h$ (rechts)

Die Steigung der um 90° gedrehten Geraden ist offenbar

$$m' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{m}.$$

Also gilt der folgende

**Satz 1.** *Zwei Geraden mit den Gleichungen $y = m_1x + b_1$ und $y = m_2x + b_2$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Produkt der Steigungen $-1$ ist:*

$$m_1m_2 = -1.$$

Beispielsweise stehen die Geraden $y = 2x$ und $y = -\frac{1}{2}x$ senkrecht aufeinander, weil $m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ ist. Umgekehrt ist die Ursprungsgerade, welche auf $y = \frac{1}{3}x$ senkrecht steht, diejenige mit der Gleichung $y = -3x$.

Die **Normale** ist diejenige Gerade, die auf eine Tangente senkrecht steht und durch den Punkt geht, in welchem die Tangente das Schaubild der Funktion berührt.

(1) Bestimme eine Gleichung der Geraden $h$, welche auf $g$ senkrecht steht und durch den Punkt $P$ geht.

a) $g: \ y = \frac{1}{2}x; \ P(2|1)$ b) $g: \ y = 3x - 1; \ P(1|2)$

c) $g: \ y = x; \ P(2|2)$ d) $g: \ y = -5x; \ P(0|0)$

Hinweis: Soll die Gerade auf $y = \frac{1}{2}x$ senkrecht stehen, dann ist $m_1 = \frac{1}{2}$; wegen $m_1 m_2 = -1$ muss daher $m_2 = -2$ sein. Jetzt alles in $y = m_2 x + b$ einsetzen. Antwort: $y = -2x + 5$.

(2) Bestimme Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild der Funktion $f$ im Punkt $P$.

a) $f(x) = x^2 + 1; \ P(1|2)$ b) $f(x) = \frac{1}{x} - 1; P(1|0)$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1; P(4|5)$ d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}; P(1|-1)$

Hinweis: Die Steigung der Tangente in $P(a|f(a))$ ist $m_t = f'(x)$. Die Steigung der Normalen ist dann $m_n = -\frac{1}{m_n}$. Die Gleichungen von Tangente und Normale erhält man durch Einsetzen in $y = mx + b$.

Antworten: Die Gleichunge der Tangenten sind

a) $t: \ y = 2x$ b) $t: \ y = -x + 1$

c) $t: \ y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $t: \ y = 2x - 3$

die der Normalen

a) $n: \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ b) $n: \ y = x - 1$

c) $n: \ y = -2x + 13$ d) $n: \ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

## 2. Steigungswinkel

Auch den **Steigungswinkel** einer Geraden, also den Winkel, der von einer Geraden und der $x$-Achse gebildet wird, liest man am Steigungsdreieck ab. Wir wissen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $H$, Ankathete $A$ und Gegenkathete $G$ die Gleichungen

$$\sin\alpha = \frac{G}{H}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{H}, \quad \tan\alpha = \frac{G}{A}$$

gelten. Im Steigungsdreieck ist die Gegenkathete gleich $m$, die Ankathete gleich 1, und daher gilt für den Steigungswinkel $\alpha$ die Gleichung $\tan\alpha = \frac{G}{A} = \frac{m}{1} = m$:

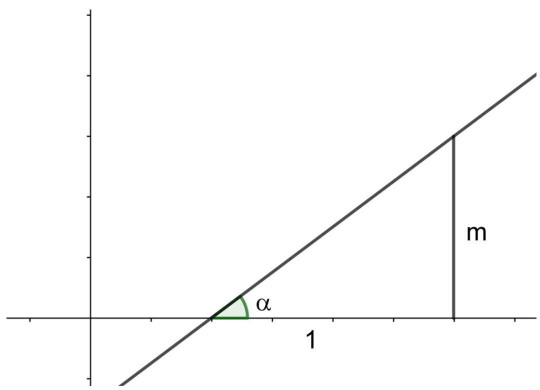


Abbildung 2. Steigungswinkel am Steigungsdreieck

**Satz 2.** *Den Steigungswinkel einer Geraden $g : y = mx + b$ bestimmt man aus der Gleichung*

$$\tan\alpha = m.$$

(3) Berechne den Steigungswinkel folgender Geraden:

a) $y = x$
b) $y = 2x$
c) $y = -\frac{1}{2}x$
d) $y = 2$

Antwort:

a) $\alpha = 45°$
b) $\alpha \approx 63,4°$
c) $\alpha \approx -26,6°$
d) $\alpha = 0°$