MATHEMATIK G10A

F. LEMMERMEYER, 22.02.2021

1. Extrempunkte

Bestimmung von Extrempunkten:

- Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$, um die Stellen $x_1, \ldots$ zu bestimmen, in denen f waagrechte Tangenten besitzt.
- Bestimmung der y-Koordinaten durch $y_1 = f(x_1), \ldots$.
- Einsetzen von $x_1, \ldots$ in $f''(x)$;

  Hochpunkt $H(x_1|y_1)$, falls $f''(x_1) < 0$ (Näherungsparabel nach unten geöffnet);

  Tiefpunkt $T(x_1|y_1)$, falls $f''(x_1) > 0$ (Näherungsparabel nach oben geöffnet).

Aufgaben

(1) Löse folgende Gleichungen.

a) $\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}x + 1$ b) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}$

c) $2x^4 + 4 = 9x^2$ d) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

(2) Löse folgende Gleichungen.

a) $3\sqrt{x} + 1 = 13$ b) $x^4 = 4$

c) $2x^3 + 2x = 5x^2$ d) $x^4 + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}x^2$

(3) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = 0,5x^4$ b) $f(x) = \frac{1}{9}x^6$

c) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 1$ d) $f(x) = 0,02x^5 + 0,05$

(4) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = -\frac{3}{7x}$ b) $f(x) = \frac{3x^2}{2x^4}$

c) $f(x) = \frac{3x}{4} - 2\sqrt{x}$ d) $f(x) = a^2x^4 - a^3x$

(5) Zeige, dass das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \frac{16}{3}$$

Extrempunkte $P(2|\frac{4}{3})$ und $Q(4|0)$ besitzt.

Untersuche, ob P und Q Hoch- oder Tiefpunkt ist.

(6) Bestimme die Extrempunkte des Schaubilds der Funktion

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3.$$

(7) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Zeige, dass $x_1 = 1$ Nullstelle von f ist.

Bestimme Hoch- und Tiefpunkte von f.

(8) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + t.$$

Bestimme t so, dass $x_0 = -2$ eine Nullstelle von f ist.

Ermitteln Sie (mit diesem Wert von t) Hoch- und Tiefpunkte dieser Funktion.

(9) Bestimme Hoch- und Tiefpunkte der Schaubilder folgender Funktionen (WTR erlaubt).

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Lösungen

(1) Löse folgende Gleichungen.

a) $\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}x + 1$

b) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}$

c) $2x^4 + 4 = 9x^2$

d) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$

Probe nicht vergessen!

(a)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &= \frac{4}{3}x + 1 && \Big|\ \cdot 12 \\ 9x &= 16x + 12 && \Big|\ -9x - 12 \\ -12 &= 7x && \Big|\ :7 \\ x &= -\frac{12}{7} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{2}{x} && \Big|\ \cdot (x-1) \\ 1 &= \frac{2(x-1)}{x} && \Big|\ \cdot x \\ x &= 2x - 2 && \Big|\ -x + 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2x^4 + 4 &= 9x^2 && \Big|\ -9x^2 \\ 2x^4 - 9x^2 + 4 &= 0 && \Big|\ x^2 = z \\ 2z^2 - 9x + 4 &= 0 && \Big|\ \text{abc-Formel} \\ z_{1,2} &= \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} && \Big| \\ z_1 &= 4 = x^2 && \Big|\ \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 2 \\ z_1 &= \frac{1}{2} = x^2 && \Big|\ \sqrt{} \\ x_{3,4} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} && \Big|\ \cdot x^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

(2) Löse folgende Gleichungen.

a) $3\sqrt{x}+1=13$ b) $x^4=4$

c) $2x^3+2x=5x^2$ d) $x^4+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}x^2$

(a)
$$\begin{aligned} 3\sqrt{x}+1 &= 13 && \Big|\ -1 \\ 3\sqrt{x} &= 12 && \Big|\ :3 \\ \sqrt{x} &= 4 && \Big|\ ^2 \\ x &= 16 && \Big|\ \text{Probe: } 3\sqrt{16}+1=13 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x^4 &= 4 && \Big|\ \sqrt{\ } \\ x^2 &= \pm 2 && x^2=-2:\text{ keine Lsg.} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x^3+2x &= 5x^2 && \Big|\ -5x^2 \\ 2x^3-5x^2+2x &= 0 \\ x(2x^2-5x+2) &= 0 && \text{Nullprodukt} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x^4+\tfrac{1}{6} &= \tfrac{5}{6}x^2 && \Big|\ -\tfrac{5}{6}x^2 \\ x^4-\tfrac{5}{6}x^2+\tfrac{1}{6} &= 0 && \Big|\ \cdot 6 \\ 6x^4-5x^2+1 &= 0 && \Big|\ x^2=z \\ 6z^2-5z+1 &= 0 && \Big|\ x^2=z \\ z_1 &= \tfrac{1}{3} \\ z_2 &= \tfrac{1}{2} \\ x_{1,2} &= \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x_{3,4} &= \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = 0,5x^4$ b) $f(x) = \dfrac{1}{9}x^6$

c) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 1$ d) $f(x) = 0,02x^5 + 0,05$

a) $f'(x) = 2x^3$ b) $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^5$

c) $f'(x) = 6x^2 - 24x$ d) $f'(x) = 0,1x^4$

(4) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = -\dfrac{3}{7x}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x^4} = \dfrac{3}{2x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{4} - 2\sqrt{x}$ d) $f(x) = a^2x^4 - a^3x$

a) $f'(x) = -\dfrac{3}{7x^2}$ b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = 4a^2x^3 - a^3$

(5) *Zeige, dass das Schaubild der Funktion f mit*

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \frac{16}{3}$$

Extrempunkte $P(2|\frac{4}{3})$ und $Q(4|0)$ besitzt.

Untersuche, ob P und Q Hoch- oder Tiefpunkt ist.

Möglichkeit 1: Extrempunkte ausrechnen.

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8$$
$$f''(x) = 2x - 6$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ ergitb (abc-Formel) $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$. Weiter ist $y_1 = f(2) = \frac{4}{3}$ und $y_2 = f(4) = 0$. Endlich gilt $f''(2) = -2 < 0$, also ist $P(2|\frac{4}{3})$ Hochpunkt; weiter ist $f''(4) = 2 > 0$, also ist $Q(4|0)$ Tiefpunkt.

Möglichkeit 2: Nachrechnen.

Weil die Ergebnisse bekannt sind, müssen wir die Gleichungen nicht lösen. Wir rechnen also nach, dass gilt:

- $f(2) = \frac{4}{3}$; $f'(0) = 0$, $f''(0) < 0$: Hochpunkt
- $f(4) = 0$, $f'(4) = 0$, $f''(4) > 0$: Tiefpunkt

(6) *Bestimme die Extrempunkte des Schaubilds der Funktion*

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3.$$

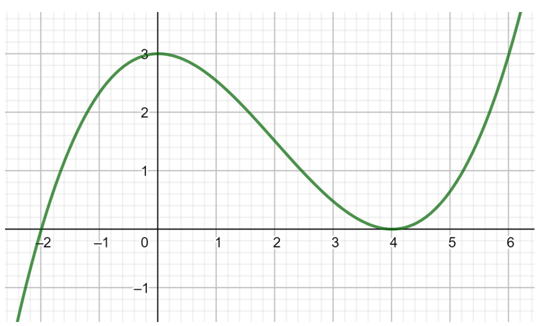
Die beiden Ableitungen sind

$$f'(x) = \frac{9}{32}x^2 - \frac{9}{8}x$$
$$f''(x) = \frac{9}{16}x - \frac{9}{8}.$$

Erste Ableitung $= 0$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{9}{32}x^2 - \frac{9}{8}x &= 0 & &\Big| \cdot 32 \\ 9x^2 - 36x &= 0 & &\Big| : 9 \\ x^2 - 4x &= 0 & &\text{Ausklammern} \\ x(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

- $x_1 = 0$; $y_1 = f(0) = 3$; $f''(0) = -\frac{9}{8} < 0$, also $H(0|3)$.
- $x_2 = 4$; $y_2 = f(4) = 0$; $f''(4) = \frac{9}{8} > 0$, also $T(4|0)$.



(7) *Gegeben ist die Funktion*

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Zeige, dass $x_1 = 1$ Nullstelle von f ist.

Bestimme Hoch- und Tiefpunkte von f.

Es ist $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$; also ist $x_1 = 1$ Nullstelle.

Hoch- und Tiefpunkte:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$
$$f''(x) = 6x - 2$$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ liefert $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$.

$f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$; $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$, also $H(-\frac{1}{3}|\frac{32}{27})$.

$f(1) = 0$; $f''(1) = 4 > 0$, also $T(1|0)$.

(8) *Gegeben ist die Funktion*

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + t.$$

Bestimme t so, dass $x_0 = -2$ eine Nullstelle von f ist.

Ermitteln Sie (mit diesem Wert von t) Hoch- und Tiefpunkte dieser Funktion.

Es soll $f(-2) = 0$ sein, also $-\frac{1}{4} \cdot (-8) - 6 + t = 0$; also ist $t = 4$.

Jetzt sollen wir die Extrempunkte von

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + 4$$

bestimmen. Ergebnis: $T(-2|0)$ und $H(2|8)$.

(9) Bestimme Hoch- und Tiefpunkte der Schaubilder folgender Funktionen (WTR erlaubt).

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

(a) $f(x) = x^2+2x+3$ beschreibt eine Parabel. Mit quadratischer Ergänzung bekommt man $f(x) = (x+1)^2+2$, und daraus kann man ablesen, dass die Parabel den Tiefpunkt $(-1|2)$ besitzt, denn $(x+1)^2$ ist für $x = -1$ am kleinsten.

Mit Differentialtrechnung geht es so:

$$f'(x) = 2x + 2$$
$$f''(x) = 2.$$

$f'(x) = 2x + 2 = 0$ liefert $x_1 = -1$; damit ist $y_1 = f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$; wegen $f''(x) = 2 > 0$ liegt ein Tiefpunkt vor $T(-1|2)$.

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Hier ist

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f''(x) = 6x$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ liefert $x_{1,2} = \pm 1$.

- $x_1 = -1,\ y_1 = f(-1) = 7,\ f''(-1) = -6 < 0$: $H(-1|7)$
- $x_2 = 1,\ y_2 = f(1) = 3,\ f''(1) = 6 > 0$: $T(1|3)$.

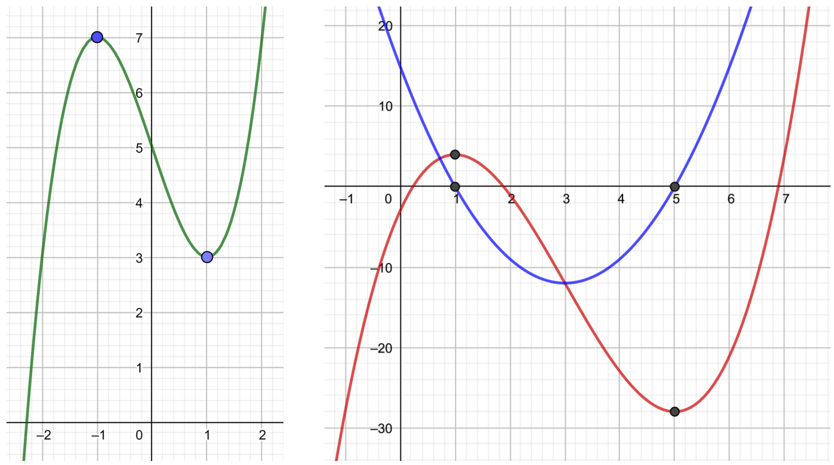


ABBILDUNG 1. Links: $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Rechts: Schaubild von $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ (rot) und $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$ (blau).

(c) Hier ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 15x - 3 \\ f'(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \\ f''(x) &= 6x - 18 \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 15 = 0 \qquad & \Big| \ : 3x^2 - 6x + 5 \qquad = 0 \qquad \text{Vieta} \\ (x-1)(x-5) = 0 \qquad & \end{aligned}$$

- $x_1 = 1,\ y_1 = f(1) = 4,\ f''(1) = -12 < 0$: $H(1|4)$.
- $x_2 = 5,\ y_2 = f(5) = -28,\ f''(5) = 12 > 0$: $T(5|-28)$.

Man schaue sich die Schaubilder von f und f' (Abb. 1 rechts) an; dort, wo dsa Schaubild von f Hoch- bzw. Tiefpunkte hat, liegen die Nullstellen von f'.

(d) Hier ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Ableitung gleich 0 setzen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x - 9 &= 0 && \Big|\ :3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{Vieta} \\ (x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

- $x_1 = -1$, $y_1 = f(-1) = 15$, $f''(-1) = -12 < 0$: $H(-1|15)$.
- $x_2 = 3$, $y_2 = f(3) = -17$, $f''(3) = 12 > 0$: $T(3|-17)$.