MATHEMATIK G10A

F. LEMMERMEYER, 29.02.2021

1. Wendepunkte

Tangenten. Tangenten im Punkt $P(a|f(a))$ an Schaubilder einer Funktion f sind Geraden $y = g(x) = mx + b$ mit der Eigenschaft, dass f und g an der Stelle u denselben Funktionswert und dieselbe Steigung haben. Dies kann man an der Art und Weise ablesen, wie wir Tangentengleichungen bestimmen: Sind f und die Stelle $x = u$ gegeben, so berechnen wir $m = f'(u)$ und $y = f(u)$ und setzen alles in $y = mx + b$ ein: aus

$$f(u) = f'(u) \cdot u + b \quad \text{folgt dann} b = f(u) - uf'(u)$$

und wir erhalten die Tangentengleichung

$$y = g(x) = f'(u)x + f(u) - uf'(u).$$

Die Steigung der Tangente ist gleich der Steigung $f'(u)$ der Tangente, und wenn wir in die Tangentengleichung $x = u$ einsetzen, folgt

$$y = g(u) = f'(u)u + f(u) - uf'(u) = f(u),$$

d.h. Tangente und Funktion haben auch denselben Funktionswert $f(u)$ in $x = u$.

Ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ gegeben, und wenn wir zeigen sollen, dass $g(x) = 3x - 9$ die Gleichung der Tangente in $x = 3$ ist, können wir die Tangente ausrechnen:

$$f'(x) = x^2 - 2x, \quad m = f'(3) = 3, \quad f(3) = 0,$$

und Einsetzen in $y = mx+b$ liefert $0 = 3 \cdot 3 + b$, also $b = -9$ und damit wie behauptet $y = 3x - 9$ als Tangentengleichung.

Wenn das Ergebnis aber schon gegeben ist, reicht es nachzurechnen, dass die Funktion f und die Gerade g in $x = 3$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung besitzen:

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{27}{3} - 9 = 0, \qquad & g(3) &= 3 \cdot 3 - 9 = 0, \\ f'(3) &= 3^2 - 2 \cdot 3 = 3, \qquad & g'(3) &= 3. \end{aligned}$$

Näherungsparabeln. Tangenten g an der Stelle $x = u$ des Schaubilds einer Funktion f sind Geraden $g(x) = mx + b$ mit der Eigenschaft, dass

$$f(u) = g(u) \quad \text{und} \quad f'(u) = g'(u)$$

ist.

Näherungsparabeln $p(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = u$ des Schaubilds einer Funktion f sind Parabeln, für welche

$$f(u) = p(u), \quad f'(u) = p'(u) \quad \text{und} \quad f''(u) = p''(u)$$

gilt.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ hat die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 2x, \\ f''(x) &= 2x - 2. \end{aligned}$$

- $p(x) = -x^2$ ist Näherungsparabel in $x = 0$. Dazu rechnen wir nach, dass f und p dieselben Funktionswerte, dieselbe Steigung und dieselbe zweite Ableitung in $x = 0$ haben. Wegen $p'(x) = -2x$ und $p''(x) = -2$ folgt (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & p(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, & p'(0) &= 0, \\ f''(0) &= -2, & p''(0) &= -2 \end{aligned}$$

- $p(x) = x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ ist Näherungsparabel in $x = 2$. Hier ist $p'(x) = 2x - 4$ und $p''(x) = 2$, sowie (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} f(2) &= -\tfrac{4}{3}, & p(2) &= -\tfrac{4}{3}, \\ f'(2) &= 0, & p'(2) &= 0, \\ f''(2) &= 2, & p''(2) &= 2. \end{aligned}$$

- $p(x) = 2x^2 - 9x + 9$ ist Näherungsparabel in $x = 3$. Hier ist $p'(x) = 4x - 9$ und $p''(x) = 4$, sowie (nachrechnen!)

$$\begin{aligned} f(3) &= 0, & p(3) &= 0, \\ f'(3) &= 3, & p'(3) &= 3, \\ f''(3) &= 4, & p''(3) &= 4. \end{aligned}$$

Wenn $p(x) = ax^2 + bx + c$ Näherungsparabel an f in $x = u$ ist, müssen insbesondere die zweiten Ableitungen von p und f übereinstimmen. Nun ist $p'(x) = 2ax + b$ und $p''(x) = 2a$; also muss $2a = f''(u)$ gelten. Wenn $f''(u) = 0$ ist, folgt $a = 0$, aber dann ist $p(x)$ keine Parabel.

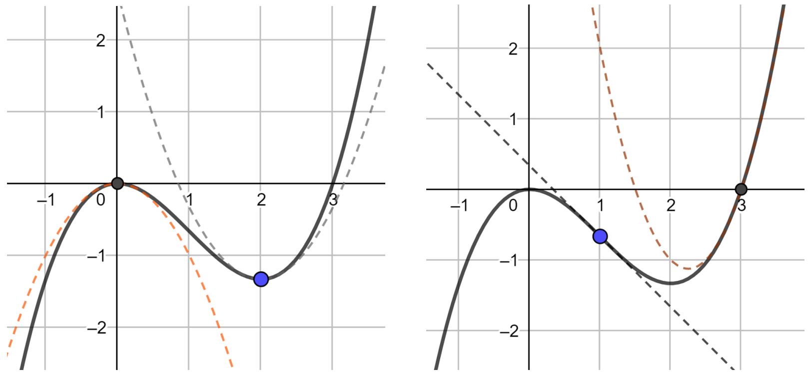


Abbildung 1. Näherungsparabeln in $x = 0$, $x = 2$ und $x = 3$; Wendetangente in $W(1|-\frac{2}{3})$.

Mit anderen Worten: Ist $f''(u) = 0$, dann existiert in $x = u$ keine Näherungsparabel. Links und rechts von solchen Punkten existieren Näherungsparabeln; wenn f'' dabei das Vorzeichen wechselt, die Näherungsparabeln links von $x = u$ also etwa nach unten und die rechts von $x = u$ nach oben geöffnet sind, dann nennt man den Punkt $W(u|f(u))$ einen Wendepunkt von f.

Das Schaubild von $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ hat in $W(1|-\frac{2}{3})$ einen Wendepunkt: links von W sind die Näherungsparabeln nach unten geöffnet, rechts davon nach oben, und in W ist $f''(1) = 0$: Dort existiert keine Näherungsparabel, sondern nur eine Wendetangente.

In Wendepunkten ist das Schaubild weder nach unten, noch nach oben gekrümmt, sondern verläuft ziemlich gerade. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades (wie oben $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$) besitzt immer genau einen Wendepunkt; ganzrationale Funktionen höheren Grades können mehrere Wendepunkte besitzen.

Beispiel: Bestimme die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 1.$$

Bestimmung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 3x \\ f''(x) &= 3x^2 - 3 \\ f'''(x) &= 6x \end{aligned}$$

Aus $f''(x) = 3x^2 - 3 = 0$ folgt $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$. Die y-Koordinaten sind $y_1 = f(-1) = -\frac{1}{4}$ und $y_2 = f(1) = -\frac{1}{4}$. In diesen Punkten

$W_1(-1|-\frac{1}{4})$ und $W_2(1|-\frac{1}{4})$ wechselt f die Krümmung (Abbildung); es handelt sich also um Wendepunkte.

Dass Wendepunkte vorliegen, folgt auch aus $f'''(-1) = -6 \neq 0$ bzw. $f'''(1) = 6 \neq 0$. In der Nähe von $x_1 = -1$ ist f''' negativ, also nimmt f'' ab; weil $f''(-1) = 0$ ist, muss f'' links von $x_1 = -1$ positiv (Näherungsparabel nach oben geöffnet) und rechts davon negativ (Näherungsparabel nach unten geöffnet) sein.

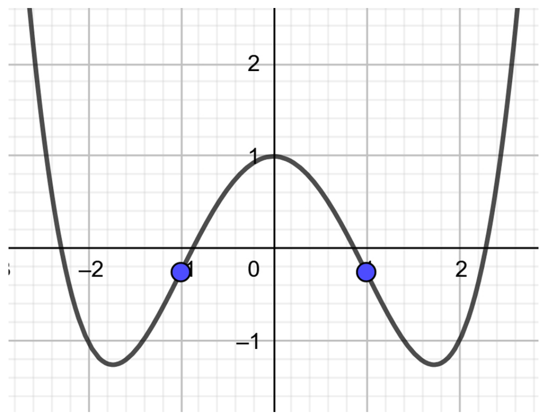


ABBILDUNG 2. Wendepunkte von $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 1$.

Grundwissen Wendepunkte.

- Wendepunkte sind Punkte des Schaubilds, in welchen sich die Krümmung ändert, also von nach unten geöffnet (Rechtskurve) zu nach oben geöffnet (Linkskurve) und umgekehrt.
- Im Wendepunkt ist die zweite Ableitung 0.
- Zur Bestimmung von Wendepunkten muss man die Gleichung $f''(x) = 0$ lösen. Ist dort $f'''(x) \neq 0$, liegt sicher ein Wendepunkt vor.

AUFGABEN

(1) Bestimme die Wendepunkte folgender Funktionen und die Wendetangenten (das sind die Tangenten im Wendepunkt).

a) $f(x) = x^3 - 6x + 2$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ d) $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{x}$

Lösungen

(1) Bestimme die Wendepunkte folgender Funktionen und die Wendetangenten (das sind die Tangenten im Wendepunkt).

a) $f(x) = x^3 - 6x + 2$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{x}$

(a) Wir bilden die beiden ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$. Der Wendepunkt ist wegen $y_1 = f(0) = 2$ also $W(0|2)$.

Wendetangente: $m = f'(0) = -6$; daraus folgt $y = -6x + 2$ als Gleichung der Tangente durch den Wendepunkt (weil W auf der y-Achse liegt, ist der y-Achsenabschnitt gleich 2).

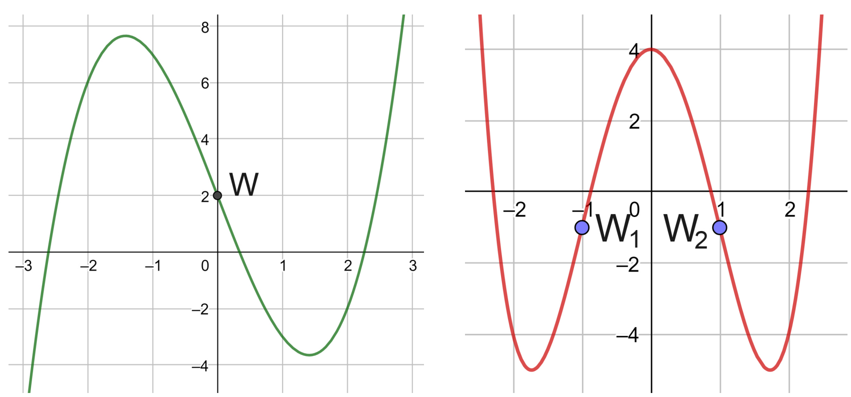


Abbildung 3. Wendepunkte von $f(x) = x^3 - 6x + 2$ und $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

(b) Wir bilden die beiden ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^2 + 4 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x \\ f''(x) &= 12x^2 - 12 \end{aligned}$$

Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $12x^2 = 12$, also $x^2 = 1$ und damit $x_1 = -1$ und $x_2 = +1$ als Wendestellen.

Wegen $f(-1) = -1$ und $f(1) = -1$ sind $W_1(-1|-1)$ und $W_2(1|-1)$ die beiden Wendepunkte.

Wendetangente in $W_1(-1|-1)$: $m = f'(-1) = -4 + 12 = 8$; Einsetzen in $y = mx + b$ liefert $-1 = 8 \cdot (-1) + b$, also $b = 7$ und damit $t_1: \ y = 8x + 7$.

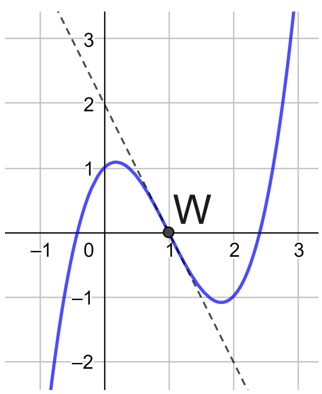
Wendetangente in $W_2(1|-1)$: $m = f'(1) = 4 - 12 = -8$; Einsetzen in $y = mx + b$ liefert $-1 = -8 \cdot (1) + b$, also $b = 7$ und damit $t_1: \ y = -8x + 7$.

(c) Wir bilden die beiden ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 1$; wegen $f(1) = 0$ ist $W_1(1|0)$ Wendepunkt.

Wendetangente: $m = f'(1) = -2$; Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $0 = -2 \cdot 1 + b$, also $b = 2$. Gleichung $t: \ y = -2x + 2$.



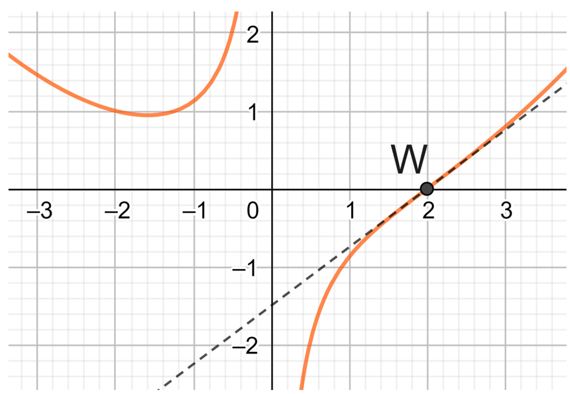


Abbildung 4. Wendepunkte von $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ bzw. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{x}$ samt Wendetangenten.

(d) Wir bilden die beiden ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{1}{4} - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Jetzt lösen wir die Gleichung $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{2}{x^3} &= 0 && \Big| + \frac{2}{x^3} \\
\frac{1}{4} &= \frac{2}{x^3} && \Big| \cdot 4x^3 \\
x^3 &= 8 && \Big| \sqrt[3]{} \\
x_1 &= 2
\end{aligned}$$

Wegen $y_2 = f(2) = 0$ ist $W(2|0)$ Wendepunkt.

Wendetangente: $m = f'(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $0 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b$, also $b = -\frac{3}{2}$ und damit $t:\ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.