MATHEMATIK G10A: VEKTOREN VIII

F. LEMMERMEYER, 03.05.2021

Geraden im Raum

Für Geraden im Raum geht alles wie in der Ebene. Die Grundaufgaben sind die folgenden.

- Geradengleichung aufstellen.

  Eine Gleichung der Geraden g durch die beiden Punkte $A(2|-1|-3)$ und $B(4|3|1)$ ist

  $$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Punktprobe: Liegen die Punkte $C(3|1|-1)$ oder $D(4|2|1)$ auf der Geraden g?

  Einsetzen von C ergibt

  $$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

  also das lineare Gleichungssystem

  $$\begin{array}{rcrcl} 3 & = & 2 & + & 2t, \\ 1 & = & -1 & + & 4t, \\ -1 & = & -3 & + & 4t. \end{array}$$

  Alle drei Gleichungen sind für $t = \frac{1}{2}$ richtig. Probe:

  $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  Also liegt C auf der Geraden.

  Punktprobe mit D liefert

  $$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

  also das lineare Gleichungssystem

  $$\begin{array}{rcrcl} 4 & = & 2 & + & 2t, \\ 2 & = & -1 & + & 4t, \\ 1 & = & -3 & + & 4t. \end{array}$$

  Dies ergibt $t = 1$, $t = \frac{3}{4}$ bzw. $t = 1$. Also liegt D nicht auf g.

- Prüfen, ob Geraden parallel sind.

  Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. So sind die Geraden
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
  parallel, weil
$$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
  ist.

  Falls man dies nicht sofort sieht, kann man den Ansatz
$$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$
  machen und die drei Einzelgeleichungen
$$\begin{aligned} -3 &= 2k \\ -6 &= 4k, \\ 6 &= -4k \end{aligned}$$
  lösen; weil sich dreimal $k = -\frac{3}{2}$ ergibt, sind $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ Vielfache voneinander.

  Man kann natürlich auch schreiben, dass
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
  ist, oder dass
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
  Vielfache ein- und desselben Vektors sind.

- Geraden schneiden: Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  Vorgehen wie bei der Punktprobe: Gleichsetzen, dann die einzelnen Gleichungen koordinatenweise aufschreiben:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 & + & 2t & = & 6 & + & s \\ -1 & + & 4t & = & 1 & - & s \\ -3 & + & 4t & = & 5 & + & 2s \end{array}$$

Jetzt sieht man, dass sich s heraushebt, wenn man die ersten beiden Gleichungen addiert. Wenn man dies macht, erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2 & + & 2t & = & 6 & + & s \\ -1 & + & 4t & = & 1 & - & s \\ \hline 1 & + & 6t & = & 7, & & \end{array}$$

also $6t = 6$ und damit $t = 1$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, folgt $2 + 2 = 6 + s$, also $s = -2$. Jetzt setzt man t und s in die entsprechenden Gleichungen ein ($t = 1$ für t, $s = -2$ für s) und erhält

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt uns, dass der Punkt $S(4|3|1)$ auf beiden Geraden liegt, folglich ist dies der Schnittpunkt. Wären zwei verschiedene Punkte herausgekommen, dann hätten die Geraden keinen Schnittpunkt gehabt. Geraden, die keinen Schnittpunkt haben und *nicht parallel* sind, nennt man *windschief*.

Der Rest ist Übung.

(1) Bestimme eine Gleichung der Geraden durch P und Q.

a) $P(-1|1|1), Q(1|4|3)$

b) $P(1|0|0), Q(0|1|0)$

c) $P(-1|1|-1), Q(-1|-2|-3)$

d) $P(0|0|0), Q(2|3|4)$

(2) Gib drei verschiedene Punkte auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

(3) Prüfe, ob die Punkte A und B auf der Geraden g liegen:

(a) $A(-6|5|-3)$, $B(-3|2|3)$, $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $A(2|1|0)$, $B(0|2|1)$, $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A(0|0|0)$, $B(0|1|1)$, $g : \vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) Prüfe, ob die folgenden Geraden einen Schnittpunkt besitzen, und berechne ggf. dessen Koordinaten.

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$