MATHEMATIK G10A: VEKTOREN VIII

F. LEMMERMEYER, 03.05.2021

Schnittpunkte von Geraden

Sind zwei Geraden in Koordinatenform gegeben, etwa

$$y = 2x - 1 \quad \text{und} \quad y = 1 - x,$$

so kann man erstens sehen, dass es einen Schnittpunkt geben muss: Die Steigungen der beiden Geraden sind $m_1 = 2$ und $m_2 = -1$; also sind sie nicht parallel. Den Schnittpunkt kann man durch Gleichsetzen ausrechnen:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 1 - x && \Big| \; + x + 1 \\ 3x &= 2 && \Big| \; : 3 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die y-Koordinate des Schnittpunkts bekommt man, indem man x in eine der beiden Geradengleichungen einsetzt. Wenn man sich nicht verrechnet hat, kommt in beiden Fällen dasselbe y heraus:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \\ y &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Also schneiden sich die beiden Geraden in $S(\frac{2}{3}|\frac{1}{3})$.

Sind die Geraden in Parameterform gegeben, ist die Rechnung verwickelter; der Grund, warum wir das trotzdem tun, ist folgender: sobald wir Geraden im Raum betrachten, gibt es nur die Parameterform!

Um die Geraden in Parameterform umzuwandeln, besorgen wir uns mit einer Wertetabelle je zwei Punkte auf jeder Geraden:

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1

x	0	1
$y = 1 - x$	1	0

Also liegen $A(0|-1)$ und $B(1|1)$ auf der Geraden $g: \; y = 2x - 1$, und deren Parametergleichung ist

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \binom{0}{-1} + r\binom{1}{2}.$$

Entsprechend liegen $C(0|1)$ und $D(1|0)$ auf der Geraden $h: \ y = 1 - x$; deren Parametergleichung ist

$$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + s \cdot \overrightarrow{CD} = \binom{0}{1} + s\binom{1}{-1}.$$

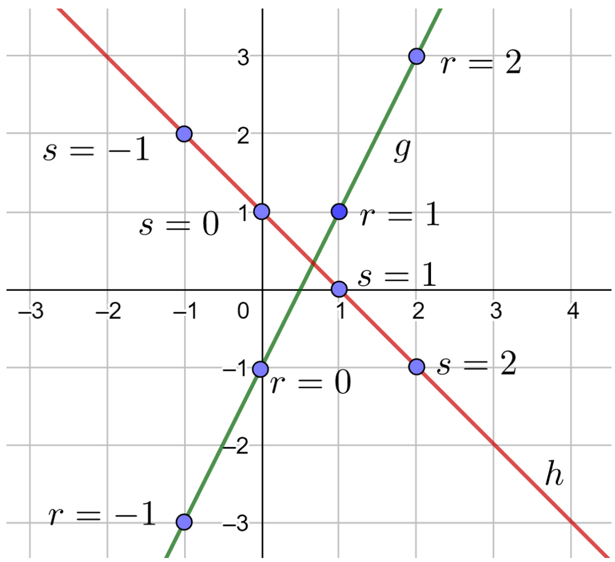
Dabei haben wir einen anderen Parameter gewählt: r sagt uns, wo auf der Geraden g wir uns befinden, und s sagt uns, wo wir auf h stehen. Diese beiden Zahlen haben nichts miteinander zu tun!

Wir zeichnen diese Geraden, indem wir kleine Werte für r bzw. für s einsetzen:

r	-1	0	1	2
$\vec{x}$	$\binom{-1}{-3}$	$\binom{0}{-1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{3}$

s	-1	0	1	2
$\vec{x}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{-1}$

Damit ergibt sich folgendes Bild:



Der Zeichnung können wir entnehmen, dass der Schnittpunkt zu einem Wert von r zwischen $r = 0$ und $r = 1$ gehört, und zu einem Wert von s zwischen $s = 0$ und $s = 1$. Um den Schnittpunkt auszurechnen, setzen wir die beiden Gleichungen gleich:

$$\binom{0}{-1} + r\binom{1}{2} = \binom{0}{1} + s\binom{1}{-1}.$$

Wie bei einer Punktprobe machen wir daraus zwei gewöhnliche Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0 & + & r & = & 0 & + & s \\ -1 & + & 2r & = & 1 & - & s \end{array}$$

Solche linearen Gleichungssystem löst man in der Regel am einfachsten mit dem Additionsverfahren. Hier sieht man, dass s herausfällt, wenn man die beiden Gleichungen addiert; man erhält dann

$$-1 + 3r = 1,$$

also $3r = 2$ und damit $r = \frac{2}{3}$.

Jetzt kann man s bestimmen, indem man $r = \frac{2}{3}$ in die erste Gleichung $r = s$ einsetzt; dann folgt $s = \frac{2}{3}$ (dass r und s gleich sind, ist Zufall!). Einsetzen in die Geradengleichungen liefert

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ h: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also liegt der Punkt $S(\frac{2}{3}|\frac{2}{3})$ auf beiden Geraden und ist somit ihr Schnittpunkt.

Alternativ könnte man im Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0 & + & r & = & 0 & + & s \\ -1 & + & 2r & = & 1 & - & s \end{array}$$

auch r eliminieren. Dazu multipliziert man die erste Gleichung mit -2, bevor man addiert (damnit r herausfällt):

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0 & - & 2r & = & 0 & - & 2s \\ -1 & + & 2r & = & 1 & - & s \\ \hline -1 & & & = & 1 & - & 3s \end{array}$$

Daraus folgt wieder $-3s = -2$, also $s = \frac{2}{3}$; Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $r = \frac{2}{3}$, und der Rest ist wie oben.

Aufgaben

(1) Bestimme den Schnittpunkt folgender Geraden:

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden durch A und B:

(a) $A(-1|1)$, $B(3|5)$

(b) $A(1|0)$, $B(3|0)$

(c) $A(-1|2)$, $B(3|3)$

Antworten

(1) a) Antwort: $r = 1$, $s = 2$, $S(3|3)$.

b) Antwort: $r = 1$, $s = 3$, $S(3|5)$.

c) Antwort: Das Gleichungssystem hat keine Lösung; die Geraden schneiden sich nicht: sie sind parallel. Dies erkennt man daran, dass die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind: $\binom{2}{2} = 2 \cdot \binom{1}{1}$.

(2) a) $S(1|3)$

b) $S(-5|0)$

c) Schnittpunkt ist offenbar der Punkt A. Weil die Geraden nicht parallel sind, ist dies der einzige Schnittpunkt.