MATHEMATIK G10A: VEKTOREN VI

F. LEMMERMEYER, 19.04.2021

Punktprobe

Wie kann man feststellen, ob ein Punkt auf einer gegebenen Gerade liegt?

Im Falle von Koordinatengleichungen ist das ganz einfach: der Punkt $P(3|5)$ liegt auf der Geraden $y = 2x - 1$, weil Einsetzen von $x = 3$ und $y = 5$ die richtige Gleichung $5 = 2 \cdot 3 - 1$ liefert. Anders gesagt: wenn man $x = 3$ einsetzt, kommt $y = 5$ raus.

Im Falle von Paramtergleichungen ist das nicht ganz so einfach. Wir haben gesehen, dass man Punkte erhält, die auf der Geraden $\vec{x} = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{2}$ liegen, indem man für t Zahlen einsetzt. Für $t = 2$ beispielsweise erhalten wir den Ortsvektor

$$\vec{x} = \binom{0}{-1} + 2 \cdot \binom{1}{2} = \binom{2}{3}$$

und damit den Punkt $Q(2|3)$. Aber wie kann man umgekehrt feststellen, welcher Wert von t auf den Punkt $Q(2|3)$ führt?

Wenn $Q(2|3)$ auf der Geraden $\vec{x} = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{2}$ liegen soll, dann muss es ein t geben, sodass der entsprechende Ortsvektor gleich $\binom{2}{3}$ ist; man setzt also den Ortsvektor $\binom{2}{3}$ für $\vec{x}$ ein:

$$\binom{2}{3} = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{2}.$$

Damit diese Gleichung richtig ist, muss auf beiden Seiten derselbe Vektor stehen, und die x- und y-Koordinaten müssen übereinstimmen. Aus der obigen Vektorgleichung lesen wir also die beiden „normalen“ Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= 0 + 1 \cdot t \\ 3 &= -1 + 2 \cdot t \end{aligned}$$

ab. Die erste Gleichung ist für $t = 2$, richtig, die zweite ebenfalls. Dies bedeutet, dass der Ortsvektor $\binom{2}{3}$ zum Parameter $t = 2$ gehört.

Um nachzuprüfen, ob der Punkt $R(-5| - 11)$ auf er Geraden liegt, setzen wir ein und lesen die beiden Gleichungen ab:

$$\binom{-5}{-11} = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{2}$$

liefert

$$\begin{aligned} -5 &= 0 + 1 \cdot t, \\ -11 &= -1 + 2 \cdot t. \end{aligned}$$

daraus folgt $t = -5$, und Einsetzen von $t = -5$ in die Geradengleichung liefert den Ortsvektor $\binom{-5}{-11}$; also liegt R auf dieser Geraden.

Der Punkt $S(5|11)$ liegt dagegen nicht auf der Geraden:

$$\binom{5}{11} = \binom{0}{-1} + t \cdot \binom{1}{2}$$

liefert

$$\begin{aligned} 5 &= 0 + 1 \cdot t, \\ 11 &= -1 + 2 \cdot t \end{aligned}$$

und die erste Gleichung ergibt $t = 5$, die zweite aber $t = 6$. Weder für $t = 5$, noch für $t = 6$ ergibt sich der Punkt S; also liegt S nicht auf der Geraden. Dies ist immer so, wenn sich beim Lösen der Gleichungen zwei verschiedene Werte ergeben.

Eine kleine Klippe gibt es noch, wenn der Richtungsvektor der Geraden eine 0 enthält. Betrachten wir etwa die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \binom{2}{-1} + r\binom{1}{0}$$

(hier haben wir den Parameter mit r bezeichnet: es muss nicht immer t sein).

Der Punkt $P(5|-1)$ liegt auf der Geraden, denn Einsetzen und Ablesen der Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} 5 &= 2 + 1 \cdot r \\ -1 &= -1 + 0 \cdot r = -1. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist für jedes r richtig, die erste für $r = 3$. Tatsächlich liefert Einsetzen von $r = 3$ den Ortsvektor

$$\vec{x} = \binom{2}{-1} + 3\binom{1}{0} = \binom{5}{-1}$$

und damit den Punkt P.

Der Punkt $Q(6|-2)$ liegt dagegen nicht auf der Geraden, denn von den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 6 &= 2 + 1 \cdot r \\ -2 &= -1 + 0 \cdot r = -1 \end{aligned}$$

ist die zweite Gleichung $-2 = -1$ nie richtig. Also gibt es auch keinen Parameter, der den Ortsvektor $\binom{6}{-2}$ ergeben würde; mit $r = 4$ (der Lösung der ersten Gleichung) erhielte man nämlich

$$\vec{x} = \binom{2}{-1} + 4\binom{1}{0} = \binom{6}{-1}$$

und nicht $\binom{6}{-2}$.

1. Aufgaben

(1) Prüfe, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g liegen.

(a) $P(5|4)$, $Q(1|3)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{-1}{1} + r\binom{2}{1}$

(b) $P(5|5)$, $Q(3|3)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{1}{2} + r\binom{2}{1}$

(c) $P(0|1)$, $Q(0|-1)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{-2}{-1} + r\binom{2}{0}$

(d) $P(3|3)$, $Q(4|5)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{3}{2} + r\binom{0}{1}$

(2) Prüfe, ob der Punkt C auf der Geraden durch A und B liegt:

(a) $A(2|-1)$, $B(3|2)$, $C(5|8)$

(b) $A(-1|1)$, $B(1|3)$, $C(3|6)$

(c) $A(1|3)$, $B(5|-1)$, $C(3|1)$

(d) $A(-2|-1)$, $B(3|-1)$, $C(5|-1)$

Hinweis: Hier stellt man die Gleichung der Geraden durch A und B auf und macht anschließend eine Punktprobe mit C.

(3) Bestimme jeweils die erste Ableitung von f.

$$
\begin{aligned}
&a) && f(x) = 3x^2 + 2x^3 + 1 \\
&b) && f(x) = \frac{3}{2x} - \frac{2x}{3} \\
&c) && f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot x \\
&d) && f(x) = 3x^5 - \frac{2}{x^2}
\end{aligned}
$$

Lösungen

(1) Prüfe, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g liegen.

(a) $P(5|4)$, $Q(1|3)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{-1}{1} + r\binom{2}{1}$

Punktprobe mit P:

$$\binom{5}{4} = \binom{-1}{1} + r\binom{2}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 5 & = & -1 & + & 2r \\ 4 & = & 1 & + & r \end{array}$$

Beide Gleichungen stimmen für $r = 3$, also liegt P auf der Geraden. Probe:

$$\binom{-1}{1} + 3\binom{2}{1} = \binom{5}{4}.$$

Punktprobe mit Q:

$$\binom{1}{3} = \binom{-1}{1} + r\binom{2}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 1 & = & -1 & + & 2r \\ 3 & = & 1 & + & r \end{array}$$

Die erste Gleichung ergibt $r = 1$, die zweite dagegen $r = 2$. Also liegt Q nicht auf der Geraden g.

(b) $P(5|5)$, $Q(3|3)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{1}{2} + r\binom{2}{1}$

Punktprobe mit P:

$$\binom{5}{5} = \binom{1}{2} + r\binom{2}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 5 & = & 1 & + & 2r \\ 5 & = & 2 & + & r \end{array}$$

Die erste Gleichung ergibt $r = 2$, die zweite dagegen $r = 3$. Also liegt P nicht auf g.

Punktprobe mit Q:

$$\binom{3}{3} = \binom{1}{2} + r\binom{2}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & = & 1 & + & 2r \\ 3 & = & 2 & + & r \end{array}$$

Beide Gleichungen ergeben $r = 1$, also liegt Q auf g. Probe:

$$\binom{1}{2} + \binom{2}{1} = \binom{3}{3}.$$

(c) $P(0|1)$, $Q(0|-1)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{-2}{-1} + r\binom{2}{0}$

Punktprobe mit P:

$$\binom{0}{1} = \binom{-2}{-1} + r\binom{2}{0}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0 & = & -2 & + & 2r \\ 1 & = & -1 & & \end{array}$$

Die zweite Gleichung $1 = -1$ ist für kein r richtig; also liegt P nicht auf g.

Punktprobe mit Q:

$$\binom{0}{1} = \binom{-2}{-1} + r\binom{2}{0}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0 & = & -2 & + & 2r \\ -1 & = & -1 & & \end{array}$$

Die erste Gleichung ist für $r = 1$ richtig, die zweite für alle r. Also liegt Q auf g. Probe:

$$\binom{-2}{-1} + \binom{2}{0} = \binom{0}{1}.$$

(d) $P(3|3)$, $Q(4|5)$, $g: \quad \vec{x} = \binom{3}{2} + r\binom{0}{1}$

Punktprobe mit P:

$$\binom{3}{3} = \binom{3}{2} + r\binom{0}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & = & 3 & & \\ 3 & = & 2 & + & r \end{array}$$

Die erste Gleichung $3 = 3$ ist für alle r richtig, die zweite für $r = 1$. Also liegt P auf g. Probe:

$$\binom{3}{2} + \binom{0}{1} = \binom{3}{3}$$

Punktprobe mit Q:

$$\binom{3}{3} = \binom{3}{2} + r\binom{0}{1}$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 4 & = & 3 & & \\ 5 & = & 2 & + & r \end{array}$$

Die erste Gleichung $4 = 3$ ist für kein r richtig, also liegt Q nicht auf g.

(2) Prüfe, ob der Punkt C auf der Geraden durch A und B liegt.

(a) $A(2|-1)$, $B(3|2)$, $C(5|8)$

Als Stützvektor für die Geradengleichung nimmt man $\overrightarrow{OA} = \binom{2}{-1}$, als Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \binom{3-2}{2-(-1)} = \binom{1}{3}$. Also lautet die Gleichung der Geraden g durch A und B

$$g: \quad \vec{x} = \binom{2}{-1} + s\binom{1}{3}.$$

Jetzt macht man Punktprobe mit C, löst also die Gleichung

$$\binom{5}{8} = \binom{2}{-1} + s\binom{1}{3}$$

durch Aufteilung in zwei „normale" Gleichungen

$$\begin{aligned} 5 &= 2 + 1 \cdot s, \\ 8 &= -1 + 3 \cdot s. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen liefern $s = 3$, also liegt C auf g, und in der Tat ist

$$\binom{5}{8} = \binom{2}{-1} + 3 \cdot \binom{1}{3}.$$

(b) $A(-1|1)$, $B(1|3)$, $C(3|6)$

Gleichung der Geraden durch A und B ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \binom{1}{-1} + s\binom{2}{2}.$$

Punktprobe mit C:

$$\binom{3}{6} = \binom{1}{-1} + s\binom{2}{2}.$$

Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & = & 1 & + & 2s \\ 6 & = & -1 & + & 2s \end{array}$$

Die erste Gleichung liefert $s = 1$, die zweite $s = 4$. Also liegt C nicht auf g.

Man kann natürlich ebensogut prüfen, ob A auf der Geraden durch B und C liegt. Die Rechnungen verlaufen dann anders, aber das Endergebnis, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, ist in allen Fällen dasselbe.

(c) $A(1|3)$, $B(5|-1)$, $C(3|1)$

Eine Gleichung der Geraden durch A und B ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

C liegt auf g und gehört zu $s = \frac{1}{2} = 0,5$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $A(-2|-1)$, $B(3|-1)$, $C(5|-1)$

Eine Gleichung der Geraden durch A und B ist

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. C liegt auf g und gehört zu $s = \frac{7}{5} = 1,4$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Die Ableitungen sind

$$a) \qquad f'(x) = 6x + 6x^2$$

$$b) \qquad f'(x) = -\frac{3}{2x^2} - \frac{2}{3}$$

$$c) \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}$$

$$d) \qquad f'(x) = 15x^4 + \frac{4}{x^3}$$