MATHEMATIK G10A: VEKTOREN IV

F. LEMMERMEYER, 29.03.2021

Heute kommt der letzte Teil des Stoffes über Vektoren, den ich normalerweise in der 9. Klasse behandle. Die Berechnung von Mittelpunkten ist dabei recht trivial; der Nachweis mit Hilfe von Vektoren, dass ein Viereck ein Parallelogramm ist, wird in den nächsten Schuljahren regelmäßig gebraucht werden und gehört zum Grundwissen.

1. Mittelpunkte

Auf der Zahlengerade ist der Mittelpunkt der beiden Zahlen $x = 3$ und $x = 9$ gegeben durch $m = \frac{3+9}{2} = 6$. Bei Punkten P und Q in der Ebene ist der Mittelpunkt M_{PQ} der Punkt, dessen x- und y-Koordinaten genau zwischen denen von P und Q liegen. Ist also $P(2|5)$ und $Q(6|-3)$, dann ist der Mittelpunkt $M_{PQ} = (\frac{2+6}{2}|\frac{5-3}{2}) = (4|1)$. Man überzeuge sich mit einer Skizze von der Korrektheit dieser Behauptung.

Dasselbe funktioniert in drei Dimensionen: der Mittelpunkt von $P(2|1|-1)$ und $Q(8|9|7)$ ist $M(5|5|3)$.

2. Parallelogramme

Um nachzurechnen, dass ein Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, kann man nachrechnen, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Schneller geht es mit Vektoren: Ist nämlich $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, dann sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang und das Viereck ist ein Parallelogramm.

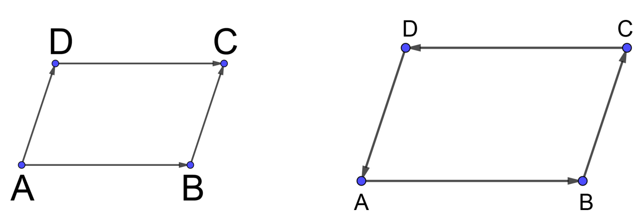

Abbildung 1. Parallelogrammbedingung $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; Vektorkette $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$.

Tatsächlich reicht es, nur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nachzurechnen. Ist dies nämlich der Fall, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} && \text{wegen } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}. \end{aligned}$$

Also ist $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$ und folglich ABCD ein Parallelogramm.

Satz 1. *Ein Viereck ABCD ist genau dann ein Parallelogramm, wenn* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *ist.*

Man beachte, dass es bei $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ auf die richtige Reihenfolge ankommt; es ist ja $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CD}$.

Beispiel 1. *Zeige, dass das Viereck ABCD mit* $A(2|3|4)$, $B(3|5|7)$, $C(4|5|8)$ *und* $D(3|3|5)$ *ein Parallelogramm ist, und gib den Schnittpunkt der Diagonalen an.*

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-3 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-3 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Also ist ABCD ein Parallelogramm.

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Mittelpunkt von AC bzw. von BD: $M(3|4|6)$.

Beispiel 2. *Ergänze das Dreieck ABC mit* $A(2|-1|-1)$, $B(3|3|0)$ *und* $C(-1|0|5)$ *zum Parallelogramm.*

Hier ist ein Punkt D gesucht mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Jetzt gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jetzt schreiben wir

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1- \quad \\ 0- \quad \\ 5- \quad \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}.$$

Den Vektor $\overrightarrow{DC}$ erhalten wir, indem wir die Koordinaten von D von denjenigen von C subtrahieren. Jetzt ergänzen wir die Gleichung durch die richtigen Koordinaten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 0-(-4) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$$

und lesen ab, dass $D(-2|-4|4)$ ist.

Zur Kontrolle rechnen wir nach, dass der Mittelpunkt M_{AC} gleich dem Mittelpunkt M_{BD} ist: $M_{AC}(0,5|-0,5|2) = M_{BD}(0,5|-0,5|2)$.