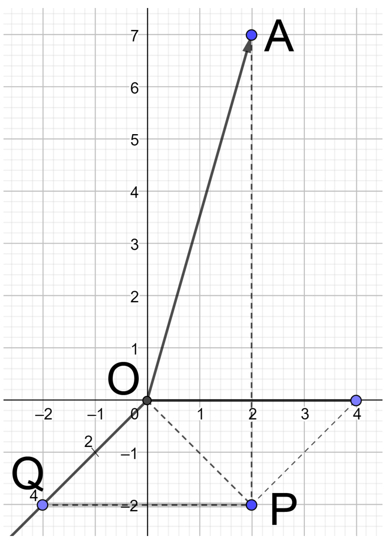
MATHEMATIK G10A: VEKTOREN II

F. LEMMERMEYER, 09.03.2021

Auch im dreidimensionalen Raum werden Längen von Vektoren und Abstände zwischen zwei Punkten mit dem Satz des Pythagoras berechnet. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{OA} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ berechnet man dabei in zwei Schritten.



Wir zerlegen den Vektor in die beiden Summanden $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$ mit $P(4|4|0)$ und $A(4|4|7)$. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{OP}$ ist dann nach Pythagoras (angewandt auf das in Q rechtwinklige Dreieck OQP) gleich $\sqrt{32}$ wegen

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

Der Vektor $\overrightarrow{PA} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ hat offenbar Länge 7. Jetzt wenden wir Pythagoras auf das in P rechtwinklige Dreieck OPA mit den Seiten $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{32}$ und $|\overrightarrow{PA}| = 7$ an und finden

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PA}|^2 = 32 + 49 = 81$$

(beachte, dass $\sqrt{32}^2 = 32$ ist).

Ersetzen wir 32 durch $32 = 4^2 + 4^2$, so kann man dies auch in der Form

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 4^2 + 4^2 + 7^2$$

schreiben. Jedenfalls hat der Vektor $\overrightarrow{OA} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ die Länge 9.

Allgemein folgt entsprechend, dass der Vektor $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \\ t \end{smallmatrix}\right)$ die Länge

$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$$

hat.

Damit können wir auch Dreiecke im dreidimensionalen Raum untersuchen.

Beispiel. *Gegeben sind die Punkte $A(-2|4|-7)$, $B(2|-4|1)$ und $C(2|8|-5)$.*

Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenklig, gleichseitig oder rechtwinklig ist.

Schritt 1. Berechnung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = 12, \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6, \\ \overrightarrow{BC} &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Nachrechnen des Satzes von Pythagoras.

Die Seite BC ist die längste; wir rechnen also nach, ob Pythagoras gilt:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 144 + 36 = 180 = |\overrightarrow{BC}|^2.$$

Daher ist das Dreieck ABC rechtwinklig im Punkt, der gegenüber der längsten Seite BC liegt, also rechtwinklig in A.

Weil keine zwei Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck nicht gleichschenklig.

Der Umfang des Dreiecks ist $U = 12 + 6 + \sqrt{180} = 18 + \sqrt{180}$.

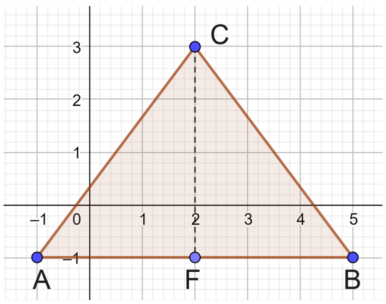
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $F = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ (hier haben wir benutzt, dass die Seiten AB und AC orthogonal sind).

Beispiel 2. *Gegeben sind die Punkte $A(-1|-1)$, $B(5|-1)$ und $C(2|3)$. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist, und berechne Umfang und Flächeninhalt.*

1. Berechnung der Vektoren und ihrer Längen.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AB}| &= 6, \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AC}| &= 5, \\ \overrightarrow{BC} &= \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{BC}| &= 5. \end{aligned}$$

Der Satz des Pathagoras stimmt nicht, weil $5^2 + 5^2 \neq 6^2$ ist. Also ist das Dreieck nicht rechtwinklig. Es ist gleichschenklig, weil AB und AC die gleiche Länge haben.



Weil das Dreieck gleichschenklig ist, ist die Höhe CF gleichzeitig die Seitenhalbierende. Wegen $|\overrightarrow{AB}| = 6$ ist also $|\overrightarrow{AF}| = 3$ und $|\overrightarrow{FB}| = 3$. Jetzt wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck AFC an. Bezeichnen wir die Höhe mit $h = |\overrightarrow{FC}|$, dann ist $3^2 + h^2 = 5^2$, woraus $h = 4$ folgt.

Also ist der Flächeninhalt $F_{ABC} = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$, und der Umfang ist $U = 5 + 5 + 6 = 16$.

Aufgaben

(1) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(2|-1|2)$, $B(2|2|5)$ und $C(4|3|-2)$ rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

(2) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(2|-1|-1)$, $B(4|3|-5)$ und $C(8|-4|-1)$ rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

(3) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(0|2|1)$, $B(2|6|5)$ und $C(4|4|-3)$ rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

(4) Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2|1|3)$, $B(4|2|5)$ und $C(3|3|1)$. Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig ist.

(5) Zeige, dass das Viereck ABCD mit $A(2|1|-1)$, $B(6|5|6)$, $C(11|0|6)$ und $D(7|-4|-1)$ ein Rechteck, aber kein Quadrat ist. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks, wie lang sind seine Diagonalen?

(6) Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(14|1|15)$, $B(8|-5|12)$, $C(15|-1|16)$ gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

Hinweis: AB und BC sind gleich lang; die Höhe durch B halbiert die Seite AC und zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke (Skizze!); berechne die Länge der Höhe mit Pythagoras.

Lösungen

(1) *Zeige, dass das Dreieck* ABC *mit* $A(2|-1|2)$, $B(2|2|5)$ *und* $C(4|3|-2)$ *rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.*

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18},$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = 6,$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{54}.$$

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras:

$$\sqrt{54}^2 = \sqrt{18}^2 + 6^2$$

ist richtig, also ist das Dreieck rechtwinkligin A.

Umfang $U = 6 + \sqrt{18} + \sqrt{54}$, Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{18} = 3\sqrt{18}$.

(2) *Zeige, dass das Dreieck* ABC *mit* $A(2|-1|-1)$, $B(4|3|-5)$ *und* $C(8|-4|-1)$ *rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.*

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6,$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{45},$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = 9.$$

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras:

$$9^2 = 6^2 + \sqrt{45}^2$$

ist richtig, also ist das Dreieck rechtwinklig in A.

Umfang $U = 15 + \sqrt{45}$, Flächeninhalt $F = 3\sqrt{45}$.

(3) *Zeige, dass das Dreieck ABC mit* $A(0|2|1)$, $B(2|6|5)$ *und* $C(4|4|-3)$ *rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.*

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6,$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = 6,$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{72}.$$

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras:

$$\sqrt{72}^2 = 6^2 + 6^2$$

ist richtig, also ist das Dreieck rechtwinklig in A. Außerdem ist das Dreieck gleichschenklig.

Umfang $U = 12 + \sqrt{72}$, Flächeninhalt $F = 18$.

(4) *Gegeben ist das Dreieck ABC mit* $A(2|1|3)$, $B(4|2|5)$ *und* $C(3|3|1)$. *Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig ist.*

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 3,$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = 3,$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{18}.$$

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras:

$$\sqrt{18}^2 = 3^2 + 3^2$$

ist richtig, also ist das Dreieck rechtwinklig in A. Außerdem ist es gleichschenklig wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

(5) *Zeige, dass das Viereck ABCD mit* $A(2|1|-1)$, $B(6|5|6)$, $C(11|0|6)$ *und* $D(7|-4|-1)$ *ein Rechteck, aber kein Quadrat ist. Wie groß sind Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks, wie lang sind seine Diagonalen?*

Um zu zeigen, dass das Viereck ein Rechteck ist, muss man zeigen, dass die Dreiecke ABC, BCD und CDA rechtwinklig sind.

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AB}| &= 9, \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{50}, \\
\overrightarrow{CD} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{CD}| &= 9, \\
\overrightarrow{DA} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{DA}| &= \sqrt{50}; \\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{131}, \\
\overrightarrow{BD} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}, & |\overrightarrow{BD}| &= \sqrt{131}.
\end{aligned}$$

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras im Dreieck ABC:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = \sqrt{50}^2 + 9^2 = 131 = |\overrightarrow{AC}^2.$$

Also ist ABC rechtwinklig in B.

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras im Dreieck BCD:

$$|\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 = 9^2 + \sqrt{50}^2 = 131 = |\overrightarrow{BD}^2.$$

Also ist BCD rechtwinklig in C.

Nachrechnen des Satzes von Pythagoras im Dreieck CDA:

$$|\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = \sqrt{50}^2 + 9^2 = 131 = |\overrightarrow{AC}^2.$$

Also ist CDA rechtwinklig in D.

Ganz entsprechend folgt die Rechtwinkligkeit von DAC in D; man kann auch darauf verweisen, dass die Winkelsumme im Viereck gleich 360° ist und ein Viereck, das drei rechte Winkel besitzt, auch einen vierten rechten Winkel hat. Weil die Seiten AB und BC nicht gleiche Länge haben, ist das Rechteck kein Quadrat.

Der Flächeninhalt ist $F = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{50}$, die Längen der Diagonalen sind $\sqrt{131}$.

(6) *Zeige, dass das Dreieck ABC mit $A(14|1|15)$, $B(8|-5|12)$, $C(15|-1|16)$ gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist, und bestimme Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.*

Bestimmung der Vektoren und ihrer Längen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 9,$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6},$$
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = 9.$$

Das Dreieck ist gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig, weil der Satz des Pythagoras nicht erfüllt ist ($9^2 + \sqrt{6}^2 \neq 9^2$).

Der Umfang des Dreiecks ist $18 + \sqrt{6}$.

Zur Bestimmung des Flächeninhalts gehen wir vor wie in Beispiel 2: Die halbe Grundseite AC ist $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ lang: bezeichnet h die Höhe auf die Seite AC, so gilt

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{6}{4} + h^2 = 9^2,$$

also $h = \sqrt{\frac{159}{2}}$. Also ist der Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{159}{2}}$.