MATHEMATIK G10A: VEKTOREN II

F. LEMMERMEYER, 09.03.2021

1. Addition von Vektoren

Mit Vektoren kann man rechnen. Die wichtigste Rechenoperation ist die Addition von Vektoren. Man addiert zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, indem man den Vektor $\vec{b}$ so verschiebt, dass er im Endpunkt von $\vec{a}$ beginnt. Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann der Vektor, der vom Beginn von $\vec{a}$ zum Ende von $\vec{b}$ zeigt.

Die zeichnerische Addition von $\vec{a} = \binom{3}{1}$ und $\vec{b} = \binom{-2}{2}$ läuft also genauso ab wie die Addition von Kräften in der Physik. Dort nennt man den Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ die Resultierende.

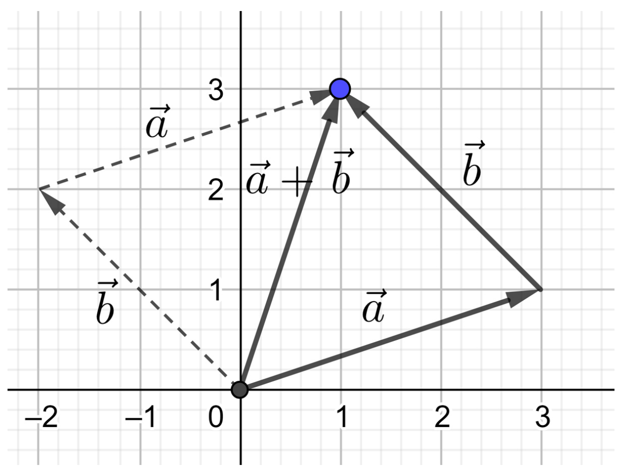


Abbildung 1. Addition der Vektoren $\binom{3}{1}$ und $\binom{-2}{2}$. Die Summe ist $\binom{3}{1} + \binom{-2}{2} = \binom{1}{3}$.

Also ist $\vec{a} + \vec{b} = \binom{3}{1} + \binom{-2}{2} = \binom{1}{3}$. Wie man sieht, addiert man Vektoren, indem man koordinatenweise addiert.

Man kann einen Vektor auch zu sich selbst addieren; das läuft auf ein Verdoppeln hinaus: $2\binom{3}{1} = \binom{3}{1} + \binom{3}{1} = \binom{6}{2}$.

Der Vektor $-\binom{3}{1}$ ist der Gegenvektor von $\binom{3}{1}$: er hat die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung.

2. Koordinaten im dreidimensionalen Raum

Die Koordinaten (2|1) beschreiben einen Punkt in der Ebene: Vom Ursprung aus geht man 2 nach rechts und 1 nach oben. Ganz entsprechend kann man Punkte im dreidimensionalen Raum mit Koordinaten beschreiben; die geometrische Darstellung leidet etwas darunter, dass wir auf einem Blatt Papier nur zwei Dimensionen zur Verfügung haben. Man muss sich also mit einem Notbehelf zufrieden geben.

Bezeichnet man die Koordinatenachsen mit x_1, x_2 und x_3 (daneben ist noch x, y und z gebräuchlich), so kann man einen Punkt $P(2|4|3)$ einzeichnen, indem man vorgeht wie folgt:

- Man zeichnet die Koordinatenachsen ein. Normalerweise werden die x_2-Achse nach rechts, die x_3-Achse nach oben und die x_1-Achse schräg nach vorn gezeichnet. Dabei entspricht 1 Längeneinheit auf der x_2- und x_3-Achse zwei Kästchen (1 cm), auf der x_1-Achse dagegen der Länge der Diagonale eines Kästchens.
- Jetzt geht man vom Ursprung aus 2 schräg nach vorn, dann von diesem Punkt aus 4 nach rechts (man steht jetzt nicht senkrecht unter der 4 auf der x_2-Achse, sondern unter der 3) und dann noch einmal 3 nach oben.
- Der Punkt (4|5|4) würde in der Zeichnung an derselben Stelle stehen. Um zeicherisch die beiden Punkte unterscheiden zu können, strichelt man den Weg zu diesen Punkten.

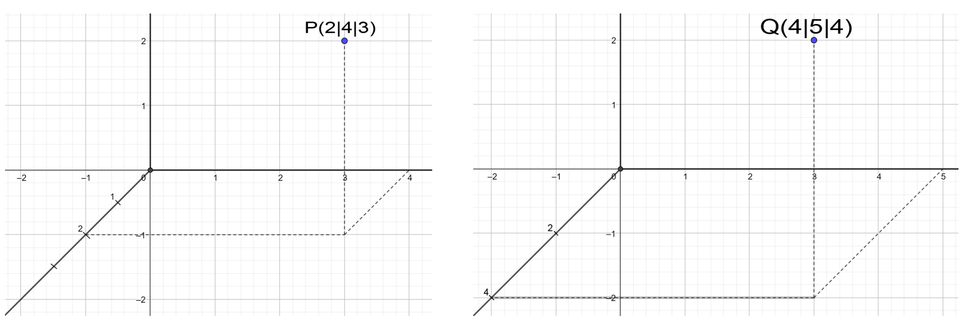


Abbildung 2. Die Punkte $P(2|4|3)$ und $Q(4|5|4)$.

Aufgaben

(1) Addiere die folgenden Vektoren zeichnerisch.

a) $\binom{2}{1} + \binom{-1}{3} =$ b) $\binom{3}{-1} + \binom{2}{3} =$

c) $\binom{1}{2} + \binom{1}{2} =$ d) $\binom{3}{-1} + \binom{-3}{1} =$

(2) Berechne:

a) $\binom{-3}{4} + \binom{2}{-2} =$ b) $3\binom{1}{-1} =$

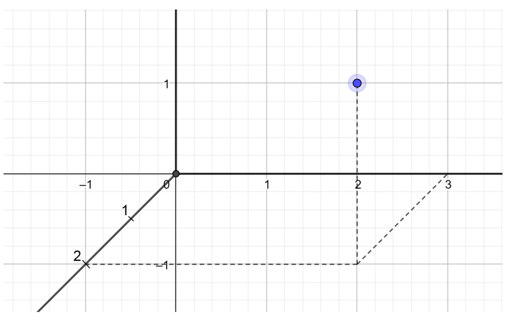
c) $\binom{2}{1} + 2\binom{-1}{1} =$ d) $\binom{3}{2} - \binom{2}{-1} =$

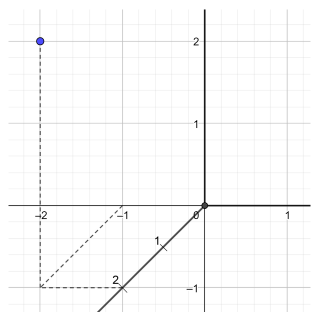
(3) Zeichne die folgenden Punkte in ein Koordinatensystem.

a) $P(3|2|3)$ b) $Q(1|3|2)$

c) $R(2|-1|4)$ d) $S(4|3|2)$

(4) Lies die Koordinaten der Punkte ab.





(5) Bestimme die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$ b) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot x$

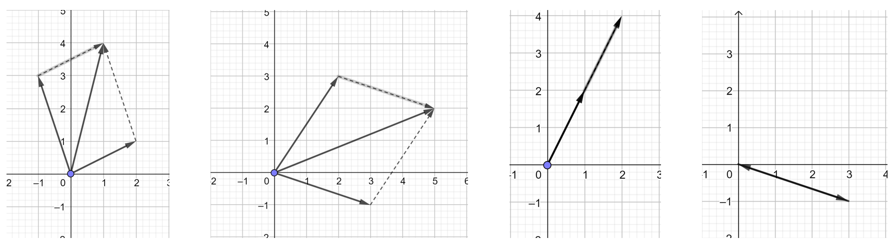
c) $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{4x}{3}$ d) $f(x) = x(x-1)$

Lösungen

(1) Addiere die folgenden Vektoren zeichnerisch.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



(2) Berechne:

a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) Zeichne die folgenden Punkte in ein Koordinatensystem.

a) $P(3|2|3)$ b) $Q(1|3|2)$

c) $R(2|-1|4)$ d) $S(4|3|2)$

(4) Lies die Koordinaten der Punkte ab.

$P(2|3|2)$ und $Q(2|-1|3)$.

(5) Bestimme die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$ b) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot x$

c) $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{4x}{3}$ d) $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$

a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{3}{4x^2} - \dfrac{4}{3}$ d) $f'(x) = 2x - 1$