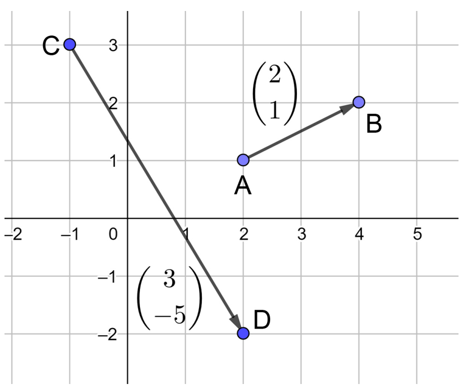
MATHEMATIK G10A: VEKTOREN II

F. LEMMERMEYER, 09.03.2021

Ein Vektor ist, anschaulich gesprochen, eine Strecke mit einer vorgegebenen Richtung. Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ etwa ist der „Pfeil“, der von A nach B zeigt. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ist der Abstand der beiden Punkte A und B; man schreibt für die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ oft $|\overrightarrow{AB}|$ (sprich: „Betrag des Vektors AB“).

Den Vektor, der von $A(2|1)$ auf den Punkt $B(4|2)$ zeigt, läuft 2 nach rechts und 1 nach oben; wir schreiben daher $\overrightarrow{AB} = \binom{2}{1}$. Für $C(-1|3)$ und $D(2|-2)$ ist entsprechend $\overrightarrow{CD} = \binom{3}{-5}$, denn der Vektor $\overrightarrow{CD}$ zeigt 3 nach rechts und 5 nach unten.



Zur Berechnung solcher Vektoren merkt man sich, dass man für $\overrightarrow{AB}$ die Koordinaten von B minus die von A rechnet (hinten minus vorne).

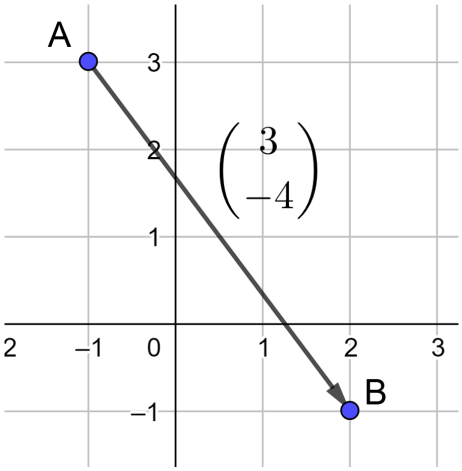
Aufgabe 1. *Sei $A(-1|3)$ und $B(2|-1)$. Zeichne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ in ein Koordinatensystem. Gib $\overrightarrow{AB}$ an und berechne seine Länge.*

Berechne auch den Vektor $\overrightarrow{BA}$ und dessen Länge.

Um von A nach B zu gelangen, muss man 3 nach rechts und 4 nach unten gehen; also ist $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{-4}$. Die Länge dieses Vektors ist nach Pythagoras

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ich empfehle, statt $\sqrt{3^2 + (-4)^2}$ gleich $\sqrt{3^2 + 4^2}$ zu schreiben; wer die Klammer um -4 vergisst, bekommt Punktabzug.



Entsprechend muss man, um von B nach A zu gelangen, 3 nach links und 4 nach oben gehen. Also ist

$$\overrightarrow{BA} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

Offenbar hat $\overrightarrow{BA}$ wie $\overrightarrow{AB}$ die Länge 5.

Man schreibt auch $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, also $-\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, und nennt solche Vektoren Gegenvektoren voneinander.

Aufgabe 2. *Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder rechtwinklig ist. Berechne weiter Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.*

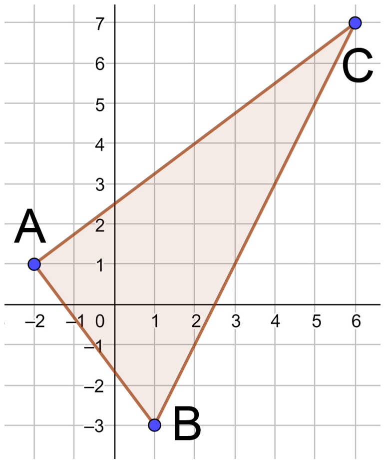
$$A(-2|1), B(1|-3), C(6|7).$$

Zur Lösung berechnen wir zuerst die drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$, dann deren Längen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AB}| &= 5 \\ \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{AC}| &= 10 \\ \overrightarrow{BC} &= \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 10 \end{smallmatrix}\right), & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{125} \end{aligned}$$

Offenbar ist das Dreieck nicht gleichschenklig, weil keine zwei Seiten gleich lang sind. Der Umfang des Dreiecks ist

$$U = 5 + 10 + \sqrt{125} = 15 + \sqrt{125} \approx 26,2.$$



Um zu prüfen, ob das Dreieck rechtwinklig ist, schauen wir nach, ob der Satz des Pythagoras erfüllt ist. Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c (diese ist immer die längste Seite) muss $a^2 + b^2 = c^2$ gelten; ist diese Gleichung umgekehrt erfüllt, ist das Dreieck rechtwinklig.

Die lange Seite ist BC mit $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{125}$. Die Frage ist also, ob die Gleichung

$$5^2 + 10^2 = \sqrt{125}^2$$

gilt. Wegen $\sqrt{125}^2 = 125$ (Quadrat und Wurzel heben sich auf) ist dies der Fall, also ist das Dreieck rechtwinklig. Der rechte Winkel ist dabei immer gegenüber der längsten Seite. Der Punkt gegenüber von BC ist aber A, also ist das Dreieck rechtwinklig in A.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist ein halbes Rechteck; hier ist also der Flächeninhalt gleich

$$F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25.$$

Übungen

(1) Zeichne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ in ein Koordinatensystem. Gib $\overrightarrow{AB}$ an und berechne seine Länge.

a) $A(-3\mid -1), B(0\mid 3)$	b) $A(2\mid 5\mid), B(-1\mid 4\mid)$
c) $A(-3\mid -5), B(6\mid 3)$	d) $A(-2\mid 0), B(2\mid 0)$

(2) Zeige, dass die folgenden Dreiecke rechtwinklig sind, und berechne Umfang und Flächeninhalt.

a) $A(1\mid 1), B(4\mid 5), C(-3\mid 4)$	b) $A(2\mid 0), B(4\mid 3), C(1\mid 5)$
c) $A(-1\mid 2), B(1\mid -6), C(5\mid -5)$	d) $A(-3\mid 1), B(3\mid 5), C(1\mid 8)$

Antworten

(1) Zeichne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ in ein Koordinatensystem. Gib $\overrightarrow{AB}$ an und berechne seine Länge.

a) $A(-3\mid -1), B(0\mid 3)$	b) $A(2\mid 5\mid), B(-1\mid 4\mid)$
c) $A(-3\mid -5), B(6\mid 3)$	d) $A(-2\mid 0), B(2\mid 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{4}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 5$	b) $\overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-1}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{10}$
c) $\overrightarrow{AB} = \binom{9}{8}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{145}$	d) $\overrightarrow{AB} = \binom{4}{0}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 4$

(2) Zeige, dass die folgenden Dreiecke rechtwinklig sind, und berechne Umfang und Flächeninhalt.

a) $A(1\mid 1), B(4\mid 5), C(-3\mid 4)$	b) $A(2\mid 0), B(4\mid 3), C(1\mid 5)$
c) $A(-1\mid 2), B(1\mid -6), C(5\mid -5)$	d) $A(-3\mid 1), B(3\mid 5), C(1\mid 8)$

(a) Seitenlängen:

- $\overrightarrow{AB} = \binom{3}{4}$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 5$
- $\overrightarrow{AC} = \binom{-4}{3}$, $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = 5$
- $\overrightarrow{BC} = \binom{-7}{-1}$, $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{50}$

Pythagoras: $5^2 + 5^2 = \sqrt{50}^2$. Das Dreieck ist rechtwinklig in A (Punkt gegenüber der längsten Seite BC).

Umfang $U = 5 + 5 + \sqrt{50} = 10 + \sqrt{50}$; Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$.

(b) Seitenlängen:

- $\overrightarrow{AB} = \binom{2}{3}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$
- $\overrightarrow{AC} = \binom{-1}{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26}$
- $\overrightarrow{BC} = \binom{-3}{2}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$

Das Dreieck ist gleichschenklig wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Wegen $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 = \sqrt{26}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$ ist das Dreieck rechtwinklig in B.

Umfang $U = 2\sqrt{13} + \sqrt{26}$; Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = \frac{13}{2}$.

(c) Seitenlängen:

- $\overrightarrow{AB} = \binom{2}{-8}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{68}$
- $\overrightarrow{AC} = \binom{6}{-7}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{85}$
- $\overrightarrow{BC} = \binom{4}{1}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{17}$

Das Dreieck ist nicht gleichschenklig, aber rechtwinklig in B wegen $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{68}^2 + \sqrt{17}^2 = \sqrt{85}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$.

Umfang $U = \sqrt{17} + \sqrt{68} + \sqrt{85}$; Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\sqrt{17} \cdot \sqrt{68}$.

(d) Seitenlängen:

- $\overrightarrow{AB} = \binom{6}{4}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{52}$
- $\overrightarrow{AC} = \binom{4}{7}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{65}$
- $\overrightarrow{BC} = \binom{-2}{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$

Das Dreieck ist nicht gleichschenklig, aber rechtwinklig in B wegen $\sqrt{13}^2 + \sqrt{52}^2 = \sqrt{65}^2$. Umfang $U = \sqrt{13} + \sqrt{52} + \sqrt{65}$. Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} = 13$.