MATHEMATIK G10A: VEKTOREN I

F. LEMMERMEYER, 08.03.2021

Heute beginnen wir mit Vektorgeometrie, und zwar mit Dingen, die aus den früheren Jahren im Wesentlichen bekannt sind: Koordinaten.

Koordinaten sind etwas, das man nach einigen Schuljahren als etwas ganz Banales wahrnimmt; dabei gehören sie, ebenso wie z.B. das Dezimalsystem, zu den ganz großen Entdeckungen der Mathematik. Um einen Punkt auf der (als Kugel gedachten) Erdoberfläche anzugeben, reichen zwei Koordinaten aus, nämlich der Längengrad und der Breitengrad. Um einen Punkt in der Ebene anzugeben, benutzen wir eine x- und eine y-Koordinate. Die ersten Vorläufer dieses Koordinatensystems gehen auf die französischen Mathematiker Pierre Fermat und René Descartes Anfang des 17. Jahrhunderts zurück; nach dem letzteren werden sie kartesische (eigentlich cartesische) Koordinaten genannt.

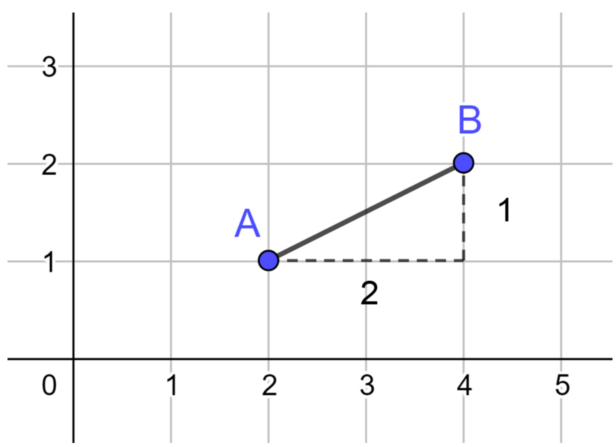

ABBILDUNG 1. Strecke AB für $A(2|1)$ und $B(4|2)$.

Betrachten wir die beiden Punkte $A(2|1)$ und $B(4|2)$. Die Länge der Strecke AB können wir mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen, wenn wir das dazugehörige Steigungsdreieck einzeichnen. Wir finden

- die Differenz der x-Koordinaten $4 - 2 = 2$,
- die Differenz der y-Koordinaten $2 - 1 = 1$;

nach Pythagoras gilt daher für die Länge $\overline{AB}$ der Strecke AB

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 1^2 = 5, \quad \text{also} \quad \overline{AB} = \sqrt{5}.$$

Die Länge der Strecke AB nennt man auch den Abstand der beiden Punkte A und B, oder deren Entfernung. Um den Abstand $d = d(A, B)$ zweier Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ zu bestimmen, berechnet man die Differenz $x_2 - x_1$ der x-Koordinaten, die Differenz $y_2 - y_1$ der y-Koordinaten, und setzt dann

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Mit Hilfe des Abstands zweier Punkte kann man entscheiden, ob

- ein Dreieck ABC gleichschenklig ist (zwei der drei Seiten AB, AC, BC müssen gleiche Länge haben);
- ein Dreieck ABC gleichseitig ist (alle drei Seiten AB, AC, BC müssen gleiche Länge haben);
- ein Viereck ein Parallelogramm ist (gegenüberliegende Seiten müssen gleich lang);
- ein Viereck ABCD eine Raute ist (alle vier Seiten AB, BC, CD, DA müssen gleiche Länge haben);
- ein Viereck ein Drachen ist (zwei Paare anliegender Seiten müssen gleiche Länge haben, z.B. $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{CD}$).

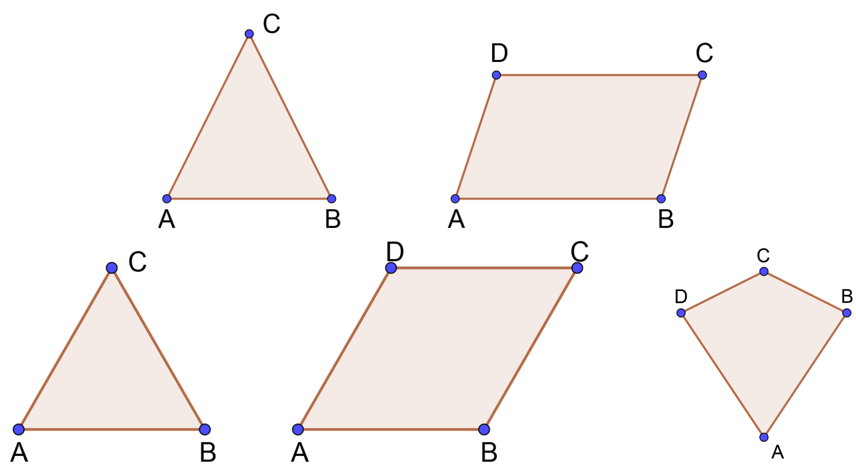

Abbildung 2. oben: gleichschenkliges Dreieck und Parallelogramm; unten: gleichseitiges Dreieck, Raute und Drachen

Übungen

(1) Berechne den Abstand $d(A, B)$ der Punkte A und B.

a) $A(0\|0), B(3\|4)$	b) $A(2\|1), B(2\|5)$
c) $A(-1\|3), B(-1\|-3)$	d) $A(2\|-1), B(5\|3)$
e) $A(-5\|1), B(7\|6)$	f) $A(1\|3), B(2\|-1)$

(2) Prüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder gleichseitig ist.

Hinweis: Berechne die Längen der drei Seiten AB, BC und CA. Sind zwei davon gleich lang, ist das Dreieck gleichschenklig; sind alle drei gleich lang, ist es gleichschenklig.

a) $A(2\|1), B(5\|5), C(5\|-3)$	b) $A(1\|1), B(4\|5), C(5\|-2)$
c) $A(2\|-1), B(2\|4), C(5\|3)$	d) $A(-2\|0), B(2\|)0, C(0\|\sqrt{12})$

(3) Zeige, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

$$A(-1|-1), B(2|0), C(1|2), D(-2|1).$$

Hinweis: Rechne nach, dass AB und DC, sowie AD und BC gleich lang sind.

Antworten

(1) Abstand $d = d(A, B)$

a) $d = 5$	b) $d = 4$
c) $d = 6$	d) $d = 5$
e) $d = 13$	f) $d = \sqrt{17}$

(2) Längen der Seiten:

a) $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 5, \overline{BC} = 8$	b) $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 5, \overline{BC} = \sqrt{50}$
c) $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 5, \overline{BC} = \sqrt{10}$	d) $\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 4$

Alle Dreiecke sind gleichschenklig, das in d) sogar gleichseitig.

(3) Länge der Seiten: $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{10}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{5}$. Also ist ABCD ein Parallelogramm.

Lösungen

(1) Berechne den Abstand $d(A,B)$ der Punkte A und B.

a) $A(0\|0), B(3\|4)$	b) $A(2\|1), B(2\|5)$
c) $A(-1\|3), B(-1\|-3)$	d) $A(2\|-1), B(5\|3)$
e) $A(-5\|1), B(7\|6)$	f) $A(1\|3), B(2\|-1)$

(a) $d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

(b) $d = \sqrt{(2-2)^2 + (5-1)^2} = 4.$

(c) $d = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-3-3)^2} = 6$

(d) $d = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = 5$

(e) $d = \sqrt{(7-(-5))^2 + (6-1)^2} = 13$

(f) $d = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17}$

(2) Prüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder gleichseitig ist.

Hinweis: Berechne die Längen der drei Seiten AB, BC und CA. Sind zwei davon gleich lang, ist das Dreieck gleichschenklig; sind alle drei gleich lang, ist es gleichschenklig.

a) $A(2\|1), B(5\|5), C(5\|-3)$	b) $A(1\|1), B(4\|5), C(5\|-2)$
c) $A(2\|-1), B(2\|4), C(5\|3)$	d) $A(-2\|0), B(2\|)0, C(0\|\sqrt{12})$

(a) $\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{BC} = \sqrt{0^2+8^2} = 8$, $\overline{CA} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig wegen $\overline{AB} = \overline{CA}$.

(b) $\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{BC} = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$, $\overline{CA} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig wegen $\overline{AB} = \overline{CA}$.

(c) $\overline{AB} = \sqrt{0^2+5^2} = 5$, $\overline{BC} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $\overline{CA} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig wegen $\overline{AB} = \overline{CA}$.

(d) $\overline{AB} = \sqrt{4^2+0^2} = 4$, $\overline{BC} = \sqrt{2^2+\sqrt{12}^2} = \sqrt{4+12} = 4$, $\overline{CA} = \sqrt{2^2+\sqrt{12}^2} = \sqrt{4+12} = 4$. Also ist das Dreieck ABC gleichseitig.

(3) *Zeige, dass ABCD ein Parallelogramm ist.*

$$A(-1|-1), B(2|0), C(1|2), D(-2|1).$$

Es ist

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10};$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5};$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10};$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}.$$

Wegen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$ sind gegenüberliegende Seiten gleich lang; also ist ABCD ein Parallelogramm.