# MATHEMATIK G10A WOCHE 2

F. LEMMERMEYER, 10.01.2021

## 1. Ableitungen

Die Ableitung von $f(x) = 2x + 1$ ist $f'(x) = 2$; dies liegt daran, dass $y = 2x+1$ eine Gerade beschreibt, die überall Steigung 2 hat, und dass $f'(x)$ die Steigung der Tangente an der Stelle $x$ angibt. Daraus folgt, dass $f(x) = mx + b$ die Ableitung $f'(x) = m$ besitzt.

Entsprechend hat $f(x) = a^2x$ die Ableitung $f'(x) = a^2$, weil $y = a^2x$ eine Gerade mit der Steigung $a^2$ beschreibt. Ein gern gemachter Fehler ist es, einen Term $2a$ in der Ableitung unterzubringen: Das ist falsch.

Die Ableitung von $f(x) = ax^2 + a^2x + a^3$ ist damit $f'(x) = 2ax + a^2$. Eine Funktion $f(x)$ wird immer nach $x$ abgeleitet; alles andere wird behandelt wie eine Konstante.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ einer Funktion ist die Ableitung der Ableitung: Für $f(x) = 2x^3$ ist $f'(x) = 6x^2$ und $f''(x) = 12x$.

(1) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 - 4$  b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$  d) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(2) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = ax^2 + a^2x$  b) $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$

c) $f(x) = a\sqrt{x} + a^2$  d) $f(x) = \frac{a^2}{x} - \frac{a}{x^2}$

(3) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 2x^7$  b) $f(x) = x^n$

c) $f(t) = 3t^2$  d) $f(t) = 2x^2t^3$

## 2. Tangenten in $x = 0$

Wir wollen nun die Tangente an das Schaubild von $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ in $x_1 = 0$ bestimmen. Die Standardmethode läuft so: Um die Gleichung der Tangente an das Schaubild einer Funktion $f$ an der Stelle $x = x_1$ zu bestimmen, bestimmt man

- $y_1 = f(x_1)$ die $y$-Koordinate des Punktes $P(x_1, |y_1)$, an dem die Tangente angebracht wird, durch Einsetzen von $x_1$ in die Funktionsgleichung $f$;
- die Ableitung $f'(x)$;
- $m = f'(x_1)$ die Tangentensteigung durch Einsetzen von $x_1$ in die Ableitung.

Im vorliegenden Fall läuft das so:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = f(0) = 1, \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x + 2, \\ m &= f'(x_1) = f'(0) = 2. \end{aligned}$$

Einsetzen in $y = mx + b$ liefert $b = 1$, also $t: \ y = 2x + 1$. Dies ist genau der "lineare Teil" von $f$, und das ist kein Zufall: für $x$ in der Nähe von 0 sind $x^2$ und $x^3$ sehr viel kleiner als $x$ selbst; also ist $y = 2x + 1$ diejenige Gerade, welche das Schaubild von $f$ bestmöglichst approximiert.

(4) Berechne die Gleichungen der Tangenten an die Schaubilder von

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2 - x + 1$ | b) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ |
| c) $f(x) = 0,5x^4 - x^2 + 3x - 1$ | d) $f(x) = x^2 - 1$ |

in $x = 0$ und bestätige, dass diese Gleichungen gleich dem linearen Teil der Funktionsgleichung ist.

## 3. Näherungsparabeln in $x = 0$

Betrachten wir nun $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ in der Nähe von $x = 0$. Wir wissen, dass die Tangente in $x = 0$ durch $y = 1$ gegeben ist. Im Punkt $P(0|1)$ liegt also eine waagrechte Tangente vor. Dieser können wir nicht entnehmen, ob es sich bei $P$ um einen lokalen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

So wie $x^2$ in der Nähe von $x = 0$ viel kleiner als $x$ ist, ist $x^3$ viel kleiner als $x^2$. Für kleine Werte von $x$ ist also $g(x) = -2x^2 + 1$ eine Näherungsparabel für das Schaubild von $f$ (siehe Abb. 1). Mit anderen Worten: in der Nähe von $x = 0$ sieht das Schaubild von $f$ aus wie die

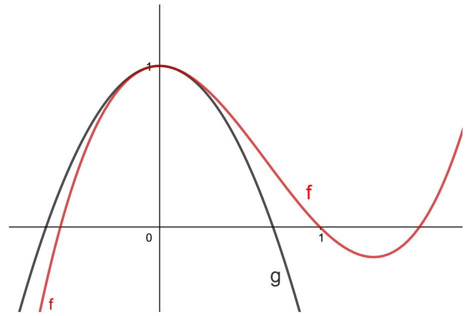


ABBILDUNG 1. Schaubild von $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ mit Näherungsparabel $g(x) = -2x^2 + 1$ in $x = 0$.

Parabel $y = -2x^2+1$. Insbesondere ist die Parabel nach unten geöffnet, folglich muss $P(0|1)$ ein Hochpunkt sein!

(5) Berechne die (waagrechte) Tangente $t$ und die Näherungsparabel $g$ für folgende Funktionen $f$ in $x = 0$. Skizziere das Schaubild von $f$ und $g$ mit geogebra. Entscheide, ob in $x = 0$ ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = x^4 - x^2 - 1$

c) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$ d) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

## 4. Hoch- und Tiefpunkte

Jetzt fehlt nur noch ein kleiner Schritt zur Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten. Der Nachteil der Methode mit der Näherungsparabel ist, dass er nur für $x = 0$ funktioniert.

Sei nun $f(x) = \ldots + ax^2 + c$ eine Funktion, welche in $x = 0$ eine waagrechte Tangente $y = c$ und die Näherungsparabel $g(x) = ax^2 + c$ besitzt. Ist $a > 0$, dann ist die Parabel nach oben geöffnet, und es liegt ein Tiefpunkt vor. Ist $a < 0$, ist die Parabel nach unten geöffnet, und es liegt ein Hochpunkt vor. Die Frage, ob ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt, lässt sich also am Vorzeichen von $a$ ablesen.

Dieses Vorzeichen kann man aber ohne Näherungsparabel bestimmen. Es ist nämlich $f'(x) = \ldots + 2ax$ und $f''(x) = \ldots + 2a$; Einsetzen von $x = 0$ ergibt $f''(0) = 2a$. Weil $f''(0) = 2a$ dasselbe Vorzeichen besitzt wie $a$, gilt also:

- Hat $f$ in $x = 0$ eine waagrechte Tangente und ist $f''(0) > 0$, dann ist die Näherungsparabel nach oben geöffnet, und es liegt ein Tiefpunkt vor.

- Hat $f$ in $x = 0$ eine waagrechte Tangente und ist $f''(0) < 0$, dann ist die Näherungsparabel nach unten geöffnet, und es liegt ein Hochpunkt vor.

Ist übrigens $f''(0) = 0$, so existiert keine Näherungsparabel (etwa bei $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^4$), und man kann über Hoch- oder Tiefpunkt ohne weitere Untersuchungen keine Aussage machen (Bei $f(x) = x^3$ liegt in $(0|0)$ trotz waagrechter Tangente weder Hoch-, noch Tiefpunkt vor; bei $f(x) = x^4$ ist $T(0|0)$ ein Tiefpunkt.

Wie sieht es nun an einer beliebigen Stelle aus? Nehmen wir an, das Schaubild der Funktion $f$ habe in $x = 2$ eine waagrechte Tangente (also ist $f'(2) = 0$). Verschiebt man das Schaubild um 2 nach links, dann hat das neue Schaubild in $x = 0$ eine waagrechte Tangente, und an der zweiten Ableitung in $x = 0$ kann man ablesen, ob ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt. Schiebt man das Schaubild wieder zurück, dann sagt uns also das Vorzeichen von $f''(2)$, ob ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt!

**Satz** *Ist $f$ eine Funktion mit erster Ableitung $f'$ und zweiter Ableitung $f''$, dann hat das Schaubild von $f$ an der Stelle $x = a$ genau dann eine waagrechte Tangente, wenn $f'(a) = 0$ ist. In diesem Fall liegt im Punkt $(a|f(a))$*

- *ein Tiefpunkt vor, wenn $f''(a) > 0$ ist;*
- *ein Hochpunkt vor, wenn $f''(a) < 0$ ist.*

Um alle Hoch- und Tiefpunkte (kurz: Extrempunkte) einer Funktion $f$ zu bestimmen, muss man also vorgehen wie folgt:

(1) Bestimme alle Punkte mit waagrechter Tangente. Dazu ist die Gleichung $f'(x) = 0$ zu lösen.

(2) Für jede Lösung $x_1, \ldots$ der Gleichung $f'(x) = 0$ berechne man $f''(x_1), \ldots$; ist $f''(x_1) > 0$, dann ist $T(x_1|f(x_1))$ ein Tiefpunkt, im Falle $f''(x_1) < 0$ ist $H(x_1|f(x_1))$ ein Hochpunkt.

Wir zeigen nun am Beispiel $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, wie man beim Bestimmen der Hoch- und Tiefpunkte vorzugehen hat.

Wir beginnen damit, die ersten beiden Ableitungen zu berechnen und dann die Gleichung $f'(x) = 0$ zu lösen.

(1) Berechnung von $f'$ und $f''$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

(2) Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \qquad \text{Ausklammern}$$
$$3x(x-2) = 0 \qquad \text{Nullproduktsatz}$$

liefert $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

(3) Berechnung der $y$-Koordinaten durch Einsetzen in $f$:

$$f(x_1) = f(0) = 4$$
$$f(x_2) = f(2) = 0$$

Damit sind die Tangenten in $(0|4)$ und $(2|0)$ waagrecht.

(4) Entscheidung über Hoch- und Tiefpunkt durch Einsetzen in $f''$:

$$f''(x_1) = f''(0) = -6 < 0$$
$$f''(x_2) = f''(2) = +6 > 0.$$

Also ist $H(0|4)$ Hochpunkt und $T(2|0)$ Tiefpunkt.

Kontrolle mit geogebra:

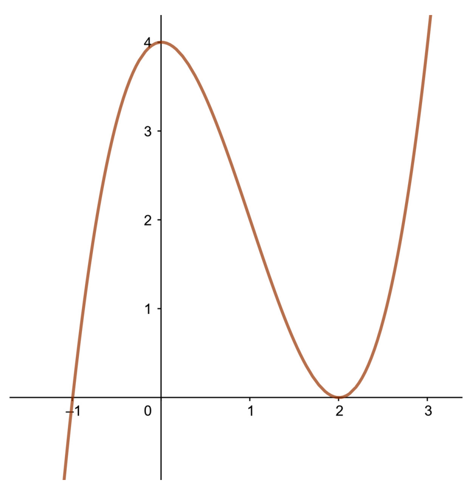


ABBILDUNG 2. Schaubild von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

## Übungen

(6) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von

  (a) $f(x) = x^2 - 4x$

  (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

  (c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

  (d) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

  (e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - \frac{5}{2}$.

  Kontrolle durch geogebra!

(7) Bestimme die Extrempunkte von

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$$

(8) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

(9) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

## Lösungen

(1) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 - 4$ b) $f(x) = 2x + 1$
c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ d) $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) $f'(x) = 6x$ b) $f'(x) = 2$
c) $f'(x) = 4x^3 - 2x$ d) $f'(x) = 2ax + b$

a) $f''(x) = 6$ b) $f''(x) = 0$
c) $f''(x) = 12x^2 - 2$ d) $f''(x) = 2a$

(2) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = ax^2 + a^2x$ b) $f(x) = \dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}$
c) $f(x) = a\sqrt{x} + a^2$ d) $f(x) = \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a}{x^2}$

a) $f'(x) = 2ax + a^2$ b) $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} - \dfrac{1}{a}$
c) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$ d) $f'(x) = -\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{2a}{x^3}$

a) $f''(x) = 2a$ b) $f''(x) = \dfrac{2a}{x^3}$
c) $f''(x) = -\dfrac{a}{4\sqrt{x}^3}$ d) $f''(x) = \dfrac{2a^2}{x^3} - \dfrac{6a}{x^4}$

Ausführliche Lösung von c) und d).

c) Wir schreiben $f$ um: $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + a^2$. Die Konstante $a$ wird beim Ableiten behandelt wie eine Zahl, also ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{a}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{a}{2\sqrt{x}}.$$

Die zweite Ableitung geht dann so:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{a}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}^3} = -\frac{a}{4\sqrt{x}^3}.$$

d) Jetzt ist

$$f(x) = \frac{a^2}{x} - \frac{a}{x^2} = a^2 \cdot x^{-1} - a \cdot x^{-2},$$

also
$$f'(x) = -a^2x^{-2} + 2ax^{-3} = -\frac{a^2}{x^2} + \frac{2a}{x^3}.$$
Weiter folgt
$$f''(x) = 2a^2x^{-3} - 6ax^{-4} = \frac{2a^2}{x^3} - \frac{6a}{x^4}.$$

(3) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = 2x^7$ | b) $f(x) = x^n$ |
| c) $f(t) = 3t^2$ | d) $f(t) = 2x^2t^3$ |

| | |
|---|---|
| a) $f'(x) = 14x^6$ | b) $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| c) $f'(t) = 6t$ | d) $f'(t) = 6x^2t^2$ |

| | |
|---|---|
| a) $f''(x) = 84x^5$ | b) $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ |
| c) $f''(t) = 6$ | d) $f''(x) = 12x^2t$ |

(4) Berechne die Gleichungen der Tangenten an die Schaubilder von

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2 - x + 1$ | b) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ |
| c) $f(x) = 0,5x^4 - x^2 + 3x - 1$ | d) $f(x) = x^2 - 1$ |

in $x = 0$ und bestätige, dass diese Gleichungen gleich dem linearen Teil der Funktionsgleichung ist.

a) $f'(x) = 2x - 1$, $y_1 = f(0) = 1$, $m = f'(0) = -1$. Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $b = 1$, also $t : y = -x + 1$.

Entsprechend findet man:

| | |
|---|---|
| a) $t: \; y = -x + 1$ | b) $t: \; y = 3x - 2$ |
| c) $t: \; y = 3x - 1$ | d) $t: \; y = -1$ |

(5) Berechne die (waagrechte) Tangente $t$ und die Näherungsparabel $g$ für folgende Funktionen $f$ in $x = 0$. Skizziere das Schaubild von $f$ und $g$ mit geogebra. Entscheide, ob in $x = 0$ ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt.

| | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ | b) $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ |
| c) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$ | d) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ |

a) Wegen $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ist $m = f'(0) = 0$; wegen $y = f(0) = 2$ muss die Tangente also $y = 2$ lauten (kann man auch an $f$ ablesen). Die Näherungsparabel in $x = 0$ erhält man durch

Weglassen der höheren Potenzen zu $g(x) = -3x^2+2$. Weil diese Parabel nach unten geöffnet ist, muss in $(0|2)$ ein Hochpunkt vorliegen.

Entsprechend findet man die

Tangenten:

| | |
|---|---|
| a) $y = 2$ | b) $y = -1$ |
| c) $y = 3$ | d) $y = -1$ |

Näherungsparabeln:

| | |
|---|---|
| a) $g(x) = -3x^2 + 2$ | b) $g(x) = -x^2 - 1$ |
| c) $g(x) = -2x^2 + 3$ | d) $g(x) = x^2 - 1$ |

Extrempunkte:

| | |
|---|---|
| a) $H(0\|2)$ | b) $H(0\|-1)$ |
| c) $H(0\|3)$ | d) $T(0\|-1)$ |

(6) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von

(a) $f(x) = x^2 - 4x$.

Wichtig: der Lösung bitte Struktur geben (Stichworte!).

- Nullstellen: Nullproduktsatz liefert wegen

  $$f(x) = x^2 - 4x = x(x-4) = 0$$

  $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

- Extrempunkte: $f'(x) = 0$ liefert wegen $2x - 4 = 0$ die Lösung $x_1 = 2$.

  Einsetzen in $f$ und $f''(x) = 2$ ergibt $f(2) = -4$ und $f''(2) = 2 > 0$. Also liegt ein Tiefpunkt vor: $T(2|4)$.

(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$.

Nullstellen: $x^2(2x-3) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

Extrempunkte: $f'(x) = 6x(x-1) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ und $x_3 = 1$.

$f(0) = 0$, $f''(0) = -6 < 0$, also $H(0|0)$.

$f(1) = -1$, $f''(1) = 6 > 0$, also $T(1|-1)$.

(c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f''(x) = 12x^2 - 4$

Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 2) = 0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ ergibt $4x(x^2-1) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

$y_1 = f(0) = 0$, $f''(0) = -4 < 0$, also $H(0|0)$.

$y_2 = f(-1) = -1$, $f''(-1) = 8 > 0$, also $T(-1|-1)$;

$y_3 = f(1) = -1$, $f''(1) = 8 > 0$, also $T(1|-1)$.

(d) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$

Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$, $f''(x) = 12x^2 - 48x + 32$.

Nullstellen: $f(x) = x^2(x^2 - 8x + 16) = x^2(x-4)^2 = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Extrempunkte: $f'(x) = 4x(x^2-6x+8) = 4x(x-2)(x-4) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

$y_1 = f(0) = 0$, $f''(0) = 32 > 0$, also $T(0|0)$.

$y_2 = f(2) = 16$, $f''(2) = -16 < 0$, also $H(2|16)$.

$y_3 = f(4) = 0$, $f''(4) = 32 > 0$, also $T(4|0)$.

(e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - \frac{5}{2}$.

Ableitungen: $f'(x) = 2x^3 - 4x$, $f''(x) = 6x^2 - 4$.

Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert nach Multiplikation mit 2 $x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2 - 5)(x^2 + 1) = 0$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.

Extrempunkte: $f'(x) = 2x(x^2 - 2)0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = +\sqrt{2}$.

(7) Bestimme die Extrempunkte von
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$, $f''(x) = 6x - 18$.

$f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5)$ ergibt $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

$y_1 = f(1) = 4$, $f''(1) = -12 < 0$, also $H(1|4)$

$y_2 = f(5) = -28$, $f''(5) = 12 > 0$, also $T(5|-28)$

(8) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Ableitungen: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

Nullstellen: $f(x) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 0 && \Big| \cdot x \\ x^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat keine Lösung, also gibt es keine Nullstellen.

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ ergibt nach Multiplikation mit $x^2$ die Gleichung $x^2 - 1 = 0$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

$y_1 = f(-1) = -2$, $f''(-1) = -2 < 0$, also $H(-2|-2)$.

$y_2 = f(1) = 2$, $f''(1) = 2 > 0$, also $T(1|2)$.

(9) Bestimme Nullstellen und Extrempunkte von $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Nullstellen: $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &= 0 && \Big| + \frac{1}{x} \\ x &= \frac{1}{x} && \Big| \cdot x \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1$. Extrempunkte gibt es nicht, weil $f'(x) = 0$ auf die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ führt.