MATHEMATIK G10A WOCHE 4

F. LEMMERMEYER, 08.02.2021

Zum Aufwärmen:

(1) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = \dfrac{4}{3x} - \dfrac{3x}{4}$ b) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$

c) $f(x) = -\dfrac{3}{5x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}$

(2) Löse die Gleichung $f'(x) = 1$ für folgende Funktionen f:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Tangente und Normale

Berechnung der Gleichung der Tangente an das Schaubild von $y = f(x)$ an der Stelle x_0:

$y_0 = f(x_0)$	y-Koordinate: x_0 in f einsetzen
$f'(x) =$	Ableitung bestimmen
$m = f'(x_0)$	Tangentensteigung: x_0 in f' einsetzen

Die Gleichung der Tangente ist $y = mx + b$; den y-Achsenabschnitt b erhält man, wenn man alles in die Tangentengleichung einsetzt: $y_0 = mx_0 + b$ und Auflösen nach b.

Die Normale ist diejenige Gerade durch den Punkt P des Schaubilds einer Funktion f, welche auf die Tangente in P senkrecht steht. Zwei Geradem mit den Steigungen m_1 und m_2 stehen senkrecht aufeinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist. Man erhält die Steigung m_n der Normalen aus der Steigung m_t der Tangente durch $m_n = -\frac{1}{m_t}$. Danach setzt man wieder alles in $y = m_n x + b_n$ ein und bestimmt den y-Achsenabschnitt b_n der Normalen.

Beispiel. Berechne die Gleicuhngen von Tangente und Normale an das Schaubild von $f(x) = x^2 - 2$ in $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} y_0 &= f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1; \\ f'(x) &= 2x \\ m &= f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

Einsetzen in $y = mx + b$ liefert $-1 = -2(-1) + b = 2 + b$, also $b = -3$ und damit $t: \quad y = -2x - 3$.

Die Steigung der Normalen ist $m_n = -\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$; Einsetzen ergibt $-1 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + b'$, also $b' = -\frac{1}{2}$ und $n: \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

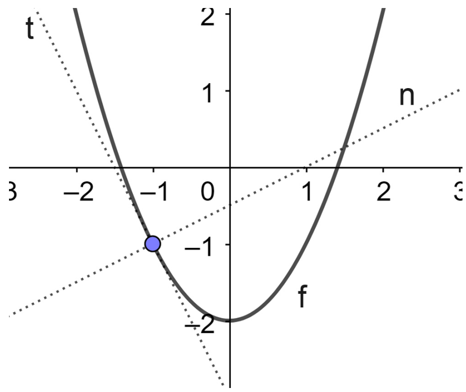

ABBILDUNG 1. Tangente t und Normale n an das Schaubild von $f(x) = x^2 - 2$ in $P(-1| - 1)$.

(3) Berechne die Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild von f an der Stelle x_0:

a) $f(x) = 2x^2 - 1;\ x_0 = 1$ b) $f(x) = -\dfrac{2}{x};\ x_0 = -1$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} + 1;\ x_0 = 4$ d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x};\ x_0 = 2$

(4) An welchen Stellen hat die Tangente an das Schaubild von f die Steigung m?

a) $f(x) = 3x^2 - 4; m = 12$ b) $f(x) = \dfrac{2}{3x}; m = -\dfrac{3}{2}$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} + 1; m = 3$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}; m = \dfrac{1}{2}$

Hinweis: Es ist die Gleichung $f'(x) = m$ zu lösen.

Lösungen

(1) Bilde die erste Ableitung

a) $f(x) = \frac{4}{3x} - \frac{3x}{4}$ b) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$

c) $f(x) = -\frac{3}{5x^2}$ d) $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$

a) $f'(x) = -\frac{4}{3x^2} - \frac{3}{4}$ b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \frac{6}{5x^3}$ d) $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{1}{a}$

(2) Löse die Gleichung $f'(x) = 1$ für folgende Funktionen f:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = -\frac{2}{x}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Die zu lösenden Gleichungen sind:

a) $2x - 4 = 1$ b) $\frac{2}{x^2} = 1$

c) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ d) $x^2 - 4x + 4 = 1$

Die Lösungen sind

a) $x_1 = \frac{5}{2}$ b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

c) $x_1 = 1$ d) $x_1 = 1, x_2 = 3$

(3) Berechne die Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild von f an der Stelle x_0:

a) $f(x) = 2x^2 - 1;\ x_0 = 1$ b) $f(x) = -\frac{2}{x};\ x_0 = -1$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} + 1;\ x_0 = 4$ d) $f(x) = x - \frac{1}{x};\ x_0 = 2$

a) $t:\ y = 4x - 3$ b) $t:\ y = 2x + 4$

c) $t:\ y = \frac{3}{4}x + 4$ d) $t:\ y = \frac{5}{4}x - 1$

a) $n:\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ b) $n:\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $n:\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{37}{3}$ d) $n:\ -\frac{4}{5}x + \frac{31}{10}$

(4) An welchen Stellen hat die Tangente an das Schaubild von f die Steigung m?

a) $f(x) = 3x^2 - 4; m = 12$ b) $f(x) = \frac{2}{3x}; m = -\frac{3}{2}$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} + 1; m = 3$ d) $f(x) = \frac{2}{x^2}; m = \frac{1}{2}$

Gleichungen:

a) $f'(x) = 6x = 12$ b) $f'(x) = -\frac{2}{3x^2} = -\frac{3}{2}$

c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} = 3$ d) $f'(x) = -\frac{4}{x^3} = \frac{1}{2}$

Lösungen:

a) $x_1 = 2$ b) $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

c) $x_1 = \frac{1}{4}$ d) $x_1 = -2$