MATHEMATIK G10A WOCHE 4

F. LEMMERMEYER, 03.02.2021

Für alle, die bisher nur Bahnhof verstehen.

1. Ableitung

Die im Wesentlichen einzigen Funktionen, die wir in Klasse 10 ableiten müssen, sind Potenzfunktionen $f(x) = x^n$. Deren Ableitung ist $f'(x) = nx^{n-1}$ (die Hochzahl wird vor das x gezogen, von der Hochzahl 1 abgezogen).

Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$
x^3	$3x^2$
$2x^5$	$10x^4$
$\frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$	$-2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$

Wichtige Spezialfälle: $f(x) = x$ hat Ableitung $f'(x) = 1$, $g(x) = 1$ hat Ableitung $g'(x) = 0$. die Funktion $f(x)$ gibt den Funktionswert (y-Koordinate) an, $f'(x)$ die Steigung der Tangente.

Zur Erinnerung:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

Ableitungsregeln.

- Die Ableitung eines Vielfachen einer Funktion ist das Vielfache der Ableitung:

$$\begin{array}{rll} f(x) = x^2 & \text{hat die Ableitung} & f'(x) = 2x \\ f(x) = 3 \cdot x^2 & \text{hat die Ableitung} & f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x \end{array}$$

- Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen:

$$f(x) = 3x^2 + 2x \quad \text{hat die Ableitung} \quad f'(x) = 6x + 2.$$

Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung; man muss die erste Ableitung nur noch einmal ableiten:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$2x^4 + x$	$8x^3 + 1$	$24x^2$
$x - \frac{2}{x}$	$1 + \frac{2}{x^2}$	$-\frac{4}{x^3}$

Übungen

(1) Berechne die erste Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ b) $f(x) = x^4 - x$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2$ d) $f(x) = 2$

(2) Schreibe in der Form $f(x) = c \cdot x^k$:

a) $\frac{2}{x} =$ b) $-\frac{3}{5x^2} =$

c) $2\sqrt{x} =$ d) $-\frac{3}{2\sqrt{x}} =$

(3) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 + x$ b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{3}{2x^2}$

(4) Bestimme die ersten drei Ableitungen.

a) $f(x) = 2x^3 - x^2$ b) $f(x) = x^4 - x$

c) $f(x) = 3x^2 + 2$ d) $f(x) = 3x^4 + 4x + 1$

(5) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ b) $f(x) = a^2x + ax^2$

c) $f(x) = \frac{c}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{cx}$

Lösungen

(1) Berechne die erste Ableitung.

a) $f'(x) = 6x$

b) $f'(x) = 4x^3 - 1$

c) $f'(x) = 9x^2 - 4x$

d) $f'(x) = 0$

(2) Schreibe in der Form $f(x) = c \cdot x^k$:

a) $\frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$

b) $-\frac{3}{5x^2} = -\frac{3}{5}x^{-2}$

c) $2\sqrt{x} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

d) $-\frac{3}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

(3) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f'(x) = 6x + 1$

b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = 2x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = -\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{x^3}$

a) $f''(x) = 6$

b) $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$

c) $f''(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}^3}$

d) $f''(x) = \frac{4}{3x^3} - \frac{9}{x^4}$

Ausführliche Lösung zu c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4\sqrt{x} && \Big| \; \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\
&= x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} && \Big| \; \text{ableiten} \\
f'(x) &= 2x + \frac{1}{2} \cdot 4x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2x + 2x^{-\frac{1}{2}} = 2x + \frac{2}{\sqrt{x}} \\
f''(x) &= 2 - \frac{1}{2} \cdot 2x^{-\frac{1}{2}-1} = 2 - x^{-\frac{3}{2}} \\
&= 2 - \frac{1}{\sqrt{x}^3}.
\end{aligned}
$$

Erinnerung: bei $x^{-\frac{3}{2}}$ hat man x^{-1} (Kehrwert), $x^{\frac{1}{2}}$ (Quadratwurzel) und x^3 zu kombinieren:

$$x^{-\frac{3}{2}} = \left((x^{-1})^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{x}^3}.$$

(4) Bestimme die ersten drei Ableitungen.

a) $f'(x) = 6x^2 - 2x$ b) $f'(x) = 4x^3 - 1$
c) $f'(x) = 6x$ d) $f'(x) = 12x^3 + 4$

a) $f''(x) = 12x - 2$ b) $f''(x) = 12x^2$
c) $f''(x) = 6$ d) $f''(x) = 36x^2$

a) $f'''(x) = 12$ b) $f'''(x) = 24x$
c) $f'''(x) = 0$ d) $f'''(x) = 72x$

(5) Bestimme die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ b) $f(x) = a^2x + ax^2$
c) $f(x) = \frac{c}{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{cx}$

a) $f(x) = 2ax + b$ b) $f(x) = a^2 + 2ax$
c) $f(x) = -\frac{c}{x^2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{cx^2}$