MATHEMATIK G10A KA 2

14.01.2022

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte (max)	9	4	4	9	3	1
Punkte						

(1) Bestimme die jeweils erste Ableitung folgender Funktionen:

$a)$ $f(x) = 0{,}24x^5 + 0{,}125x^4$

$b)$ $f(x) = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{2}{3x^2}$

$c)$ $f(x) = \dfrac{x^4}{2x}$

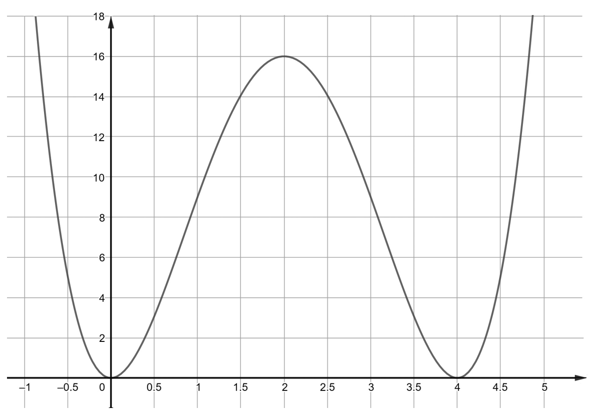
$d)$ $f(x) = \sqrt{3} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{x}$

$e)$ $f(x) = 2(x-2)^2 + \pi$

$f)$ $f(x) = a^2x^4 + a^4x^2$

(2) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Lies aus dem Schaubild die Nullstellen, die Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten und näherungsweise die der Wendepunkte ab.

Bestimme weiter näherungsweise den Wert von $f'(1)$.



(3) Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale des Schaubilds der Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ in $x = 4$.

(4) Berechne die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion
$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x.$$

(5) Gegeben ist die Funktion $f(x) = kx - x^2$. Bestimme k so, dass

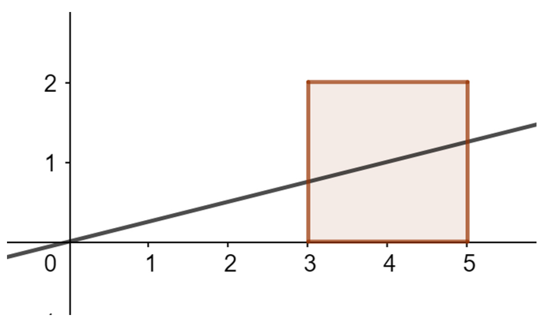
  (a) das Schaubild durch den Punkt $P(1|1)$ geht;

  (b) die Tangente in $x = 3$ Steigung $m = 0$ besitzt;

  (c) die beiden Nullstellen Abstand 2 haben

(6) An einem Pferderennen nehmen nur schwarze oder braune Pferde teil. Dabei gibt es 50 % mehr schwarze als braune Pferde. Wie viel Prozent der Pferde sind braun?

(*) Eine Gerade durch den Ursprung teilt das Quadrat mit den Eckpunkten (3|0), (5|0), (5|2) und (3|2) in zwei gleich große Flächen. Bestimme die Steigung der Geraden.



Lösungen

(1) Bestimme die jeweils erste Ableitung folgender Funktionen:

a)
$$f(x) = 0{,}24x^5 + 0{,}125x^4$$
$$f'(x) = 1{,}2x^4 + 0{,}5x^3$$

b)
$$f(x) = -\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2}$$
$$f'(x) = \frac{3}{2x^2} - \frac{4}{3x^3}$$

c)
$$f(x) = \frac{x^4}{2x} = \frac{x^3}{2}$$
$$f'(x) = \frac{3x^2}{2}$$

d)
$$f(x) = \sqrt{3} \cdot x + 3 \cdot \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

e)
$$f(x) = 2(x-2)^2 + \pi = 2x^2 - 4x + 2 + \pi$$
$$f'(x) = 4x - 4$$

f)
$$f(x) = a^2x^4 + a^4x^2$$
$$f'(x) = 4a^2x^3 + 2a^4x$$

(2) Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$;

Tiefpunkte $(0|0)$ und $(4|0)$, Hochpunkt $(2|16)$.

Wendepunkte $(0{,}8|8)$ und $(3{,}2|8)$.

$f'(1) \approx 24$.

(3) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y = f(4) = 3$; $m = \frac{1}{2}$; Tangente $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Normale: $y = -2x + 11$.

(4) Berechne die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 3x^2 - 3x \\ f'(x) &= 9x^2 - 6x - 3 \\ f''(x) &= 18x - 6 \end{aligned}$$

Nullstellen: $3x(x^2-x-1) = 0$ führt auf $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Wenn man 3 nicht ausklammert, erhält man

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{6}.$$

Hier kann man die 3 und die 6 nicht ohne Weiteres kürzen; dazu muss man $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ schreiben, und dann folgt

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{6} = x_{2,3} = \frac{3(1 \pm \sqrt{5}\,)}{3 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$ führt auf $3(3x^2 - 2x - 1) = 0$, also $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$.

- $x_1 = -\frac{1}{3}$; $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$, $f''(-\frac{1}{3}) = -12 < 0$, also $H(-\frac{1}{3}|\frac{5}{9})$.
- $x_2 = 1$; $f(1) = 3$, $f''(1) = 12 > 0$, also $T(1|-3)$.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ ergibt $x = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{3}) = -\frac{11}{9}$, also $W(\frac{1}{3}|-\frac{11}{9})$.

(5) Es ist $f'(x) = k - 2x$.

(a) $1 = f(1) = k - 1$ ergibt $k = 2$.

(b) $0 = f'(3) = k - 6$ ergibt $k = 6$.

(c) Weil $x_1 = 0$ immer Nullstelle ist, muss die andere entweder $x_2 = -2$ oder $x_2 = 2$ sein, also $k_{1,2} = \pm 2$.

(6) Sei x die Prozentzahl der braunen Pferde; dann gibt es $1{,}5x$ Prozent schwarze Pferde; aus $x + 1{,}5x = 100$ folgt dann $x = 40$; also sind 40 % der Pferde braun.

(*) Eine Gerade, welche die Fläche eines Quadrats halbiert, geht durch dessen Mittelpunkt. Hier ist $M(4|1)$, also ist $m = \frac{1}{4}$.