MATHEMATIK G10A KLASSENARBEIT 2

11.12.2019

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte (max)	6	5	5	14
Punkte				

(1) Gegeben sind die Punkte $A(0|3|-1)$ und $B(3|3|3)$.

a) Gib eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B an.

b) Liegen die Punkte $C(6|3|7)$ und $D(-3|3|-3)$ auf der Geraden g?

c) Welche Punkte auf g haben von B den doppelten Abstand wie A?

d) Gib eine Gleichung der Geraden h durch D an, welche parallel zu g ist.

(2) Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gib die Gleichung einer Geraden an, welche g und h schneidet.

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_3-Ebene.

(3) Berechne die Spurpunkte der Ebenen $E: 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ und $F: x_1 + 2x_3 = 4$ und zeichne beide Ebenen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(4) Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit auf geradem Kurs über eine flache Landschaft. Diese Landschaft wird in einem Koordinatensystem als x_1x_2-Ebene beschrieben.

F_1 befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $P(0|0|1)$, zur Zeit $t = 1$ im Punkt $Q(0|8|5)$. Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich F_2 in $R(0|0|4)$ bzw. in $S(-1|5|6)$ (Koordinatenangaben in km, Zeitangaben in min).

a) Bestimmen Sie je eine Gleichung der Geraden g und h, welche die Flugbahnen der beiden Flugzeuge beschreibt.

Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugbahnen nicht schneiden.

Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge nach 30 Sekunden?

In welcher Höhe befinden sich die Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 0$?

Welche Geschwindigkeit hat F_1?

Befindet sich Flugzeug F_2 im Steigflug oder im Sinkflug? Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Wann erreicht F_1 die Höhe 1,8 km?

Wann befinden sich beide Flugzeuge auf gleicher Höhe?

Wie nahe sind sie sich zu diesem Zeitpunkt?

(1) *Gegeben sind die Punkte $A(0|3|-1)$ und $B(3|3|3)$.*

a) *Gib eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B an.*

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) *Liegen die Punkte $C(6|3|7)$ und $D(-3|3|-3)$ auf der Geraden g?*

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist richtig für $t = 2$, also liegt C auf g.

Betrachten der x_1-Koordinate von $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ liefert $t = -1$, aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Also liegt D nicht auf g.

c) *Welche Punkte auf g haben von B den Abstand 10?*

Wegen $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, und weil B zu $t = 1$ gehört, erhalten wir die gesuchten Punkte mit $t = -1$ und $t = 3$; dies gibt $P(-3|3 < -5)$ und $Q(9|3|11)$

d) *Gib eine Gleichung der Geraden h durch D an, welche parallel zu g ist.*

$h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2) *Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden*

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gleichsetzen liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} 12 + 2s &= 18 + t \\ 6 + s &= 6 + t \\ 6 - s &= -12 + 2t. \end{aligned}$$

Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt $12 = -63t$, also $t = 6$. Einsetzen liefert $s = 6$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist $S(24|12|0)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Gib die Gleichung einer Geraden an, welche g und h schneidet.

Wir wählen die Gerade druch $P(12|6|6)$ und $Q(18|6|-12)$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$.

Jede Gerade durch $S(24|12|0)$ schneidet ebenfalls g und h.

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_3-Ebene.

$x_2 = 6 + s = 0$ liefert $s = -6$, also $S_2(0|0|12)$.

(3) *Berechne die Spurpunkte der Ebenen $E : 2x_1+3x_2+2x_3 = 6$ und $F : x_1 + 2x_3 = 4$ und zeichne beide Ebenen in ein gemeinsames Koordinatensystem.*

Spurpunkte von E sind $S_1(3|0|0)$, $S_2(0|2|0)$ und $S_3(0|0|3)$. Die Spurpunkte von F sind $S_1(4|0|0)$ und $S_2(0|2|0)$.

(4) *Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit auf geradem Kurs über eine flache Landschaft. Diese Landschaft wird in einem Koordinatensystem als x_1x_2-Ebene beschrieben.*

F_1 befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $P(0|0|1)$, zur Zeit $t = 1$ im Punkt $Q(0|8|5)$. Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich F_2 in $R(0|0|4)$ bzw. in $S(-1|5|6)$ (Koordinatenangaben in km, Zeitangaben in min).

a) *Bestimmen Sie je eine Gleichung der Geraden g und h, welche die Flugbahnen der beiden Flugzeuge beschreibt.*

Man findet

$$F_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad F_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugbahnen nicht schneiden.

Gleichsetzen (Achtung: verschiedene Parameter nehmen!) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= -s, \\ 8r &= 5s, \\ 1 + 4r &= 4 + 4s. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nacheinander $s = 0$, $r = 0$, $1 = 4$: die Bahnen schneiden sich also nicht.

Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 0$, welchen nach 30 Sekunden?

Abstand von P und R ist $|\overrightarrow{PR}| = 3$; zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die Flugzeuge 3 km voneinander entfernt.

30 sec = 0,5 min; Einsetzen von $t = 0,5$ liefert die beiden Punkte $P_1(0|4|3)$ und $P_2(-0{,}5|2{,}5|5)$. Deren Abstand ist

$$d = \sqrt{0,5^2 + 1,5^2 + 2^2} \approx 2{,}5.$$

Nach 30 Sekunden ist der Abstand etwa 2,5 km.

In welcher Höhe befinden sich die Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 0$?

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich F_1 in einer Höhe von 1 km, F_2 in einer Höhe von 4 km.

Welche Geschwindigkeit hat F_1, welche F_2?

$v_1 = \sqrt{0^2 + 8^2 + 4^2} \approx 8,94$, d.h. F_1 hat eine Geschwindigkeit von 8,94 km/km $\approx$ 537 km/h.

$v_2 = \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2} \approx$ 5,48 km/min $\approx$ 329 km/h.

Befinden sich die Flugzeuge im Steigflug oder im Sinkflug? Begründen Sie Ihre Aussage.

Beide Flugzeuge steigen, da die x_3-Koordinaten der Richtungsvektoren positiv sind.

b) *Wann erreicht F_1 die Höhe 1,8 km?*

Es muss $x_3 = 1 + 4r = 1,8$ sein; dies liefert $r = 0,2$, d.h. F_1 erreicht nach 0,2 Minuten eine Höhe von 1,8 km.

In welchem Punkt befindet sich F_1 zu diesem Zeitpunkt?

Zum Zeitpunkt $r = 0{,}2$ befindet sich F_1 in $(0|1{,}6|1{,}8)$.

Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

F_2 befindet sich zu diesem Zeitpunkt in $(-0{,}2|1|4{,}4)$. Der Abstand der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt ist daher

$$d = \sqrt{0,2^2 + 0,6^2 + 2,6^2} \approx 2{,}7,$$

also etwa 2,7 km.

Wann befinden sich beide Flugzeuge auf gleicher Höhe? Wie nahe sind sie sich zu diesem Zeitpunkt?

Gleiche Höhe zum Zeitpunkt t bedeutet $1 + 4t = 4 + 2t$, also $t = 1{,}5$. Dies ist nach 1,5 min, also nach 90 Sekunden. Einsetzen von $t = 1,5$ ergibt $P_1(0|12|7)$ für F_1 und $P_2(-1,5|7,5|7)$ für F_2.