MATHEMATIK G10A

M. SCHLEGEL, 11.02.2015

(1) Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = -3x^4 + 2$

b) $f(x) = x(5-x)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + x$

d) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{4}$

e) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x}$

f) $f(x) = tx^2 + t^2$

(2) Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$$

(3) Bestimme die Gleichungen von Normale und Tangente im Punkt $P(2|f(2))$ an das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2}{x} + 4.$$

(4) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x.$$

(a) An welchen Stellen besitzt das Schaubild von f waagerechte Tangenten?

(b) Wo besitzt die Funktion f eine Normale mit Steigung $\frac{1}{2}$?

(c) In welchen Intervallen ist die Steigung der Funktion größer als 6?

(5) Bestimme die Gleichung einer Funktion, die im Punkt $T(0|-2)$ einen Tiefpunkt besitzt.

(6) Gib den Term einer Funktion an, die überall monoton fallend ist, sowohl negative als auch positive Funktionswerte besitzt aber dennoch keine Nullstellen hat.

Lösungen (FL)

(1) *Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.*

a) $f(x) = -3x^4 + 2$
b) $f(x) = x(5-x) = 5x - x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + x$
d) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{4}$
e) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x} = x - 4$
f) $f(x) = tx^2 + t^2$

a) $f'(x) = -12x^3$
b) $f'(x) = 5 - 2x)$
c) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + 1$
d) $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{4}$
e) $f'(x) = 1$
f) $f(x) = 2tx$

(2) *Berechne die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion*

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$f''(x) = 6x + 6$$

Ableitung $f'(x) = 0$ setzen:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Big| \; : 3$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{Vieta oder abc-Formel}(x+3)(x-1) \quad = 0$$

- $x_1 = -3$, $y_1 = f(-3) = 29$, $f''(-3) = -12 < 0$: $H(-3|29)$.
- $x_2 = 1$, $y_2 = f(1) = -3$, $f''(1) = 12 > 0$: $T(1|-3)$.

(3) *Bestimme die Gleichungen von Normale und Tangente im Punkt $P(2|f(2))$ an das Schaubild der Funktion f mit*

$$f(x) = \frac{2}{x} + 4.$$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $m = f'(2) = -\frac{1}{2}$, $y = f(2) = 5$. Einsetzen in $y = mx + b$ ergibt $5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, also $b = 6$ und damit $t : y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Steigung der Normalen $m_n = -\frac{1}{m} = 2$; Einsetzen in $y = m_n x + b'$ ergibt $5 = 2 \cdot 2 + b'$, also $b' = 1$ und damit $n : y = 2x + 1$.

(4) *Gegeben ist die Funktion f mit*

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x.$$

(a) *An welchen Stellen besitzt das Schaubild von f waagerechte Tangenten?*

Waagrechte Tangente bedeutet Tangentensteigung 0, also $f'(x) = 0$. Offenbar ist $f'(x) = 2x^2 - 2 = 0$ in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

(b) *Wo besitzt die Funktion f eine Normale mit Steigung $\frac{1}{2}$?*

Normalensteigung $m_n = \frac{1}{2}$ bedeutet Tangentensteigung $m_t = -2$ wegen $m_n m_t = -1$; also muss $f'(x) = 2x^2 - 2 = -2$ sein. Dies ergibt $x = 0$.

(c) *In welchen Intervallen ist die Steigung der Funktion größer als 6?*

Es muss $f'(x) = 2x^2 - 2 > 6$ sein. Umformen:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2 &> 6 && \mid +2 \\ 2x^2 &> 4 && \mid :2 \\ x^2 &> 4 \end{aligned}$$

Aus $x^2 = 4$ folgt $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$. Liegt x zwischen diesen Werten, ist $x^2 < 4$; also ist $x^2 > 4$ für $x < -2$ und für $x > 2$ (Die Funktionen $y = x^2$ und $y = 4$ zeichnen und ablesen ist auch in Ordnung).

(d) *Bestimme die Gleichung einer Funktion, die im Punkt $T(0|-2)$ einen Tiefpunkt besitzt.*

Die einfachste solche Funktion ist $f(x) = x^2 - 2$ (um 2 nach unten verschobene Normalparabel).

(e) *Gib den Term einer Funktion an, die überall monoton fallend ist, sowohl negative als auch positive Funktionswerte besitzt aber dennoch keine Nullstellen hat.*

$f(x) = \frac{1}{x}$ hat diese Eigenschaften: