# WAHRSCHEINLICHKEIT

F. LEMMERMEYER

(1) Maja hat 4 Pilze gesammelt. Gib das Gegenerignis der folgenden Ereignisse an.
   (a) Mindestens ein Pilz ist giftig.
   (b) Alle Pilze sind giftig.
   (c) Höchstens zwei Pilze sind giftig.

(2) Zwei Würfel werden geworfen. Gib das Gegenereignis zu folgenden Ereignissen an:
   (a) Die Augensumme ist mindestens 4
   (b) Es ist keine 6 dabei
   (c) Die Augensumme ist ungerade

(3) Die 29 Schülerinnen der 9a bekommen Hausaufgaben. Gib zu folgenden Ereignissen das Gegenereignis an.
   a) Alle Schülerinnen machen die Hausaufgaben
   b) Mindestens eine Schülerin macht die Hausaufgaben.
   c) Höchstens 20 Schülerinnnen machen die Hausaufgaben.

(4) Eine faire Münze wird drei Mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
   (a) Es erscheint genau zwei Mal Zahl.
   (b) Es erscheint mindestens zwei Mal Zahl.
   (c) Es erscheint höchstens zwei Mal Zahl.
   (d) Es erscheint beim ersten Mal Zahl.
   (e) Nur beim ersten Wurf erscheint Zahl.
   (f) Beim ersten und zweiten Wurf erscheint Zahl.

(5) Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Ist es wahrscheinlicher, Augensumme 11 zu werfen als Augensumme 12?

(6) Ein Würfel wird drei Mal geworfen. Ist es wahrscheinlicher, Augensumme 10 zu werfen als Augensumme 9?

(7) Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

   (a) Man würfelt einen Pasch (gleiche Augenzahlen).
   (b) Die Augensumme ist mindestens 11.
   (c) Die Augensumme ist gerade.
   (d) Die Differenz der Augenzahlen ist 1.
   (e) Das Produkt der Augenzahlen ist 6.
   (f) Das Produkt der Augenzahlen ist eine Primzahl (also 2, 3 oder 5).
   (g) Beide Augenzahlen sind Primzahlen.

(8) Beim Werfen eines Würfels betrachten wir die Ereignisse

   A Die Augenzahl ist ungerade.
   B Die Augenzahl ist eine Primzahl.

   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Würfeln

   (a) A nicht eintritt
   (b) A und B eintreten
   (c) weder A noch B eintreten
   (d) A oder B eintritt

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt bei zweimaligen Würfeln jedes Mal A und B auf?

(9) Von zwei Ereignissen A und B ist bekannt, dass

$$p(A) = 0{,}4; \quad p(B) = 0{,}3 \quad \text{und} \quad p(A \cap B) = 0{,}1$$

   ist (hier steht $A \cap B$ für „A und B“).

   Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

   (a) Das Ereignis A tritt nicht ein.
   (b) Mindestens eines der Ereignisse A oder B tritt ein.
   (c) Höchstens eines der Ereignisse A oder B tritt ein.

(d) Keines der beiden Ereigniss tritt ein.

(e) Das Ereignis A tritt ein, B dagegen nicht.

(10) Eine Lotterie enthält 18.000 Lose in den Farben rot, gelb, und blau. Die Wahrscheinlichkeit, ein rotes Los zu ziehen, beträgt 0,2. Die Wahrscheinlichkeit, ein nichtgelbes Los zu ziehen beträgt $\frac{3}{4}$. Wie viele Lose gibt es von jeder Sorte?

(11) Drei Schützen schießen auf eine Tontaube. Sie treffen erfahrungsgemäß mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) alle drei Schützen die Tontaube treffen?

(b) mindestens einer der Schützen die Tontaube trifft?

(12) In einer Schachtel befinden sich zwei weiße und vier gelbe Tischtennisbälle. Frank und Karl vereinbaren folgendes Spiel: sie nehmen abwechselnd einen Ball aus der Schachtel, ohne ihn zurückzulegen. Wer zuerst einen weißen Ball zieht, hat gewonnen. Frank beginnt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Frank das Spiel?

(13) Eine Münze wird zweimal geworfen. Gib zu jedem der folgenden Ereignisse das Gegenereignis an!

(a) Man wirft zweimal Wappen.

(b) Man wirft zweimal Kopf oder zweimal Wappen.

(14) In einer Urne sind 3 rote und 4 gelbe Kugeln, in einer andern Urne eine gelbe und eine rote. Anne zieht aus der ersten Urne eine Kugel zufällig, ohne sie zurückzulegen. Dann zieht sie zufällig eine Kugel aus der zweiten Urne und legt sie in die erste. Schließlich zieht sie noch eine Kugel aus der ersten Urne.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Anne drei rote Kugeln?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die dritte Kugel, die Anne zieht, rot?

(15) Malte gewinnt im Schach durchschnittlich zwei von fünf Partien gegen Olaf; zwei von fünf gehen Remis (unentschieden) aus, und eine von fünf verliert er.

Bei einem Gewinn gibt es einen Punkt für den Sieger, bei einem Remis (Unentschieden) einen halben Punkt für jeden. Das Match wird beendet, wenn der erste Spieler zwei Punkte hat.

Olaf hat die erste Partie gewonnen, die zweite endete Remis.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Malte das Duell trotzdem noch gewinnen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht es unentschieden aus?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Olaf?

(16) Wie oft muss man würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,8 % mindestens einmal eine 5 zu werfen?

(17) Ein Glücksrad hat drei große Felder mit den Farben grün, rot und blau. Wie oft muss man es drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens einmal grün zu drehen?

(18) Wie oft muss man eine Münze mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,5 % mindestens einmal Zahl zu werfen?

## Vierfeldertafel

(1) Bei 1000 Söhnen wurde untersucht, ob zwischen der Augenfarbe (hell bzw. dunkel) bei Vätern und Söhnen ein Zusammenhang besteht. Vervollständige folgende Vierfeldertafel:

| | Sohn hell | Sohn dunkel | gesamt |
|---|---|---|---|
| Vater hell | 471 | 151 | |
| Vater dunkel | | 230 | |
| gesamt | | | |

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Sohn eines dunkeläugigen Vaters helle Augen?

(2) In einer Untersuchung über einen Zusammenhang zwischen Augenfarbe und Haarfarbe unter 128 Personen gab es folgende Ergebnisse:

| | blond | nicht blond | gesamt |
|---|---|---|---|
| grüne Augen | | | 49 |
| nicht grüne Augen | | 55 | |
| gesamt | 30 | | |

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand blond und hat grüne Augen?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand, der grüne Augen hat, auch blond?

(3) 100,000 Neugeborene werden auf Schwerhörigkeit untersucht. Von 1000 Neugeborenen ist eines schwerhörig.

Bei 98,9 % der schwerhörigen Kinder wird die Schwerhörigkeit auch erkannt. Bei 10 % der gesunden Kinder wird fälschlicherweise eine Schwerhörigkeit diagnostiziert.

a) Stelle eine Vierfeldertafel auf (schwerhörig/nicht schwerhörig, bzw. Test weist auf Hörstörung hin/nicht hin).

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als schwerhörig getestetes Neugeborenes auch tatsächlich schwerhörig ist?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert der Test, dass ein schwerhöriges Neugeborenes gesund ist?

(4) In der Qualitätskontrolle einer Fabrik für Elektronikbauteile werden Kontrollen durchgeführt. Bauteile, die nicht vollständig funktionstüchtig sind, werden zu 95 % als solche erkannt; allerdings kommt es auch in 2 % der Fälle vor, dass wegen eines Messfehlers funktionstüchtige Bauteile irrtümlich als nicht funktionstüchtig angezeigt werden. Erfahrungsgemäß sind 90 % der Bauteile in Ordnung.

(a) Erstelle eine Vierfeldertafel (z.B. für 10 000 untersuchte Bauteile).

(b) Ein zufällig herausgegriffenes Bauteil wird als "fehlerhaft" angezeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es tatsächlich nicht zu gebrauchen?

(c) Ein zufällig herausgegriffenes Bauteil wird als "funktionstüchtig" angezeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es tatsächlich zu gebrauchen?

(5) In einer Studie wird ein Medikament an 400 erkrankten Personen getestet. 60 % der Personen erhalten das Medikament, die restlichen ein Placebo. Ein Viertel der mit dem Placebo behandelten Personen wird gesund, ein Fünftel der mit dem Medikament behandelten bleibt krank.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) eine getestete Person krank bleibt?

b) eine Person, die gesund wird, das Placebo erhalten hat?

(6) 92 % der in einem Werk gefertigten Elektrogeräte sind fehlerfrei. In einer Endkontrolle werden 5 % der einwandfreien und 98 % der fehlerhaften Geräte aussortiert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) ein aussortiertes Gerät fehlerhaft ist?

(b) ein nicht aussortiertes Gerät fehlerfrei ist?

(7) In Deutschland wurden im vergangenen Jahr ca. 400.000 Unfälle mit Personenschäden registriert, davon waren 10,2 % durch Alkohol verursacht. Während sich 24,6 % der Verkehrsunfälle ohne Alkoholeinfluss nachts ereigneten, waren es bei den Alkohol-Unfällen immerhin 68,0 %, die in der Nacht geschahen.

a) Stelle die Daten des Artikels in einer Vierfeldertafel zusammen.

b) Ein Unfall mit Personenschaden wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Unfall

(1) unter Alkoholeinwirkung geschah, wenn bekannt ist, dass er tagsüber stattfand?

(2) tagsüber stattfand, wenn bekannt ist, dass Alkohol im Spiel war?

## Erwartungswert

(1) In einem Spiel wird 1 Euro Einsatz verlangt; danach wird 3 Mal eine Münze geworfen. Wenn dabei zweimal hintereinander Zahl auftritt, erhält man eine Auszahlung von 2 Euro.

Wie groß ist der Erwartungswert für den Gewinn?

(2) In einer Urne befinden sich 4 rote und 3 gelbe Kugeln, und es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der roten Kugeln.

(3) Ein Lotto-jackpot enthält 2 Millionen Euro; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist 0,000 000 04. Berechne den zu erwartenden Gewinn pro Spiel, wenn ein Lottoschein 2 Euro kostet.

(4) Bei einem Glücksspiel darf man nach einem Einsatz von 1 Euro zweimal würfeln.

Die folgende Tabelle zeigt die Auszahlung je nach gewürfelter Augensumme (Summe der beiden gewürfelten Augen):

| Augensumme | Auszahlung |
|---|---|
| mindestens 9 | nichts |
| 10 | 1 Euro |
| 11 | 5 Euro |
| 12 | 10 Euro |

Berechne den Erwartungswert für den Gewinn (Auszahlung minus Einsatz). Lohnt es sich, das Spiel zu spielen?

Wie hoch müsste die Auszahlung bei Augensumme 12 sein, damit das Spiel fair ist?

(5) Bei einem Tennismatch werden so viele Sätze gespielt, bis einer der beiden Spieler insgesamt zwei Sätze gewonnen hat. Ein Match besteht daher aus mindestens zwei und höchstens drei Sätzen.

Eva und Bettina spielen ein Match gegeneinander. Eva gewinnt Sätze jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,7.

(a) Zeichne ein Baumdiagramm.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Eva das Match?

(c) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Spiele?

(6) In einer Urne sind 1 gelber, 3 blaue und 2 rote Bälle. Man zieht 2 Bälle ohne Zurücklegen.

Falls man 2 Bälle derselben Farbe hat, bekommt man 4 Euro, wenn man einen gelben und einen roten Ball zieht (Reihenfolge egal), bekommt man 2 Euro.

a) Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.

b) Welchen Einsatz würdest du als Spieleanbieter fordern? Begründe deine Forderung.

(7) Bei einem Glücksspiel mit einem Einsatz von 1 Euro werden drei Würfel geworfen. Wenn alle Würfel eine 6 anzeigen, erhält der Spieler 120 Euro ausbezahlt. Lohnt sich das Spiel für den Anbieter?

(8) In einer Urne liegen drei Kugeln, auf denen die Zahlen 0, 1 und 2 aufgedruckt sind. Man zieht nun zwei Kugeln ohne Zurücklegen und bestimmt das Produkt der entsprechenden Zahlen.

Bestimmen den Erwartungswert des Produkts.

(9) Eine Urne enthält 2 rote und 3 grüne Kugeln. Es wird so lange jeweils eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen, bis zum ersten Mal eine grüne Kugel gezogen wird. Wie oft muss man durchschnittlich ziehen?

(10) Eine Umfrage ergab, dass jeder dritte Befragte seinen Urlaub in Deutschland verbringt. Von den übrigen haben 40 % südliche, 20 % nördliche Reiseziele. 60 Befragte machten keine Angaben.

a) Wie viele Befragte gibt es?

b) Ein beliebiger Befragter wird ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht er Urlaub in Deutschland, südlich, nördlich bzw. macht er keine Angaben?

(11) Ein Spielautomat zeigt in jedem von drei Feldern zu 30 % eine Münze, ansonsten eine Banane an. Bei zwei Münzen wirft der Automat einen Euro, bei drei Münzen 3 Euro aus, ansonsten gibt es keine Auszahlung. Der Einsatz beträgt 50 Cent.

Wie groß ist der Erwartungswert für den Gewinn eines Spielers? Ist das Spiel fair?

(12) In einer Klasse sind im Nachmittagsunterricht mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % alle Schülerinnen anwesend, während die Wahrscheinlichkeit, dass 1, 2, …, 5 von ihnen fehlen durch die folgende Tabelle gegeben sind:

| Anzahl | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,25 | 0,15 | 0,1 | 0,07 | 0,03 |

a) woran kann man erkennen, dass nie mehr als 5 Schülerinnen fehlen?

b) Wieviel fehlende Schülerinnen kann man durschnittlich erwarten?

(13) Auf einem Tisch stehen drei Urnen; in jeder Urne befinden sich 3 gelbe und 5 rote Kugeln. Heiner bietet dir folgendes Spiel an: nach einem Einsatz von 6 Euro ziehst du blind aus eine Kugel aus der ersten Urne und legst sie in die zweite; dann ziehst du eine Kugel aus der zweiten und legst sie in die dritte; zum Schluss ziehst du eine Kugel aus der dritten. Wenn du drei mal die gelbe Kugel gezogen hast, erhältst du 30 Euro, bei zwei gezogenen gelben Kugeln bekommst du den Einsatz zurück. Lohnt sich das Spiel langfristig für dich?

Wie hoch müsste der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

(14) Petra will die Tür zum Klassenzimmer aufschließen. Dazu bekommt sie von ihrem Klassenlehrer einen Schlüsselbund mit fünf gleich aussehenden Schlüsseln.

a) Sie merkt sich nach jedem vergeblichen Versuch den Schlüssel, der nicht passte. Damit hat sie spätestens beim fünften Versuch die Türe aufgeschlossen.

Zeichne ein Baumdiagramm für die möglichen Ereignisse.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit öffnet Petra die Tür im zweiten Versuch?

b) Berechne den Erwartungswert für die Anzahl der Versuche, die sie zum Öffnen der Türe braucht.

(15) Zeige: Bei viermaligem Würfeln erwartet man im Schnitt $\frac{4}{6}$ Sechser. Wie oft muss man mit zwei Würfeln werden, damit der Erwartungswert eines 6er-Paschs gleich groß ist?

Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

(a) Bei viermaligem Werfen eines Würfels erscheint mindestens eine 6.

(b) Bie 24-maligem Werfen von zwei Würfeln erscheint mindestens ein 6er-Pasch.