2. Potenzen

Potenzen sind Produkte gleicher Faktoren. Quadratzahlen wie $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ sind zweite, Kubikzahlen wie $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sind dritte Potenzen. Im täglichen Leben spielen vor allem die Potenzen der Zahl 10 eine Rolle, und mit diesen wollen wir uns zuerst befasssen.

2.1 Das Rechnen mit Zehnerpotenzen

Die Einheiten für Länge, Gewicht und Zeit hat man zu allen Zeiten so gewählt, dass man sehr große und sehr kleine Zahlen vermeiden kann. Die Körpergröße hat man in Fuß gemessen und nicht in Meilen, das Gewicht von Butter in Pfund usw.

Auch heute noch werden etwa die Größe von Fahrrädern oder von Bildschirmen in Zoll gemessen. Ein Zoll, im Englischen inch, ist umgerechnet 2,54 cm. Ein Fuß besteht aus 12 inch, ein yard aus 3 Fuß, dann folgen die Einheiten „chain“ (22 yards), „furlong“(10 chains) und die Meile (8 furlongs).

Um die von Stadt zu Stadt verschiedenen Versionen von Fuß, Elle oder Meile zu vereinheitlichen haben die Franzosen nach ihrer Revolution dezimale Maße eingeführt. Den Meter legten sie als den 10-millionsten Teil der Entfernung zwischen Nordpol und Äquator fest; diese Entfernung bestimmten sie[1], indem sie die Entfernung zwischen Dünkirchen in der Bretagne und Barcelona so genau maßen, wie es die damalige Zeit erlaubte. Dass diese Entfernung heute etwa 40 007 km beträgt, zeigt, wie genau Méchain und Delambre damals trotz der Wirren der Revolution ihre Aufgabe erledigt haben. Inzwischen haben alle Länder – mit Ausnahme der USA – das metrische System übernommen.

In der Atomphysik und der Astronomie liegen die Längen, Zeiten und Massen in ganz anderen Größenordnungen, weswegen dort andere Einheiten benutzt werden. Die metrischen Einheiten lassen sich durch gewisse Präfixe vergrößern und verkleinern: so sind ein Kilogramm 1000 g und 1 Millimeter ist der tausendste Teil eines Meters. Große Potenzen von 10 werden in der Regel nicht ausgeschrieben, sondern abgekürzt: so ist $1\,000\,000 = 10^6$ und $1\,000\,000\,000 = 10^9$: bei Zehnerpotenzen zählt die Hochzahl die Anzahl der Nullen.

Die gebräuchlichsten Präfixe für große Einheiten sind:

[1] Das Abenteuer dieser “Vermessung der Welt” ist Thema einer ganzen Reihe von Büchern; sehr empfehlenswert ist *Längengrad* von Dana Sobel.

kilo	Mega	Giga	Tera
Tausend	Million	Milliarde	Billion
10^3	10^6	10^9	10^{12}

Diese Regeln werden nicht immer konsequent eingehalten: statt Megagramm (das sind 10^6 g, also 10^3 kg) benutzt man in der Regel das Wort Tonne, und statt Gigagramm eher Megatonne, etwa im Zusammenhang mit der Sprengkraft von Atombomben. Daneben gibt es noch die Vorsilbe hekto, die man vor allem bei Hektolitern (100 Liter) und Hektar (100 ar, also 10 000 m^2) benutzt.

Man beachte auch, dass die Einheiten Kilobyte und Megabyte für die Größe von Dateien nicht genau Tausend bzw. 1 Million Byte angeben. Dies liegt daran, dass man in der Informatik gerne im Dualsystem rechnet, also mit Zweierpotenzen. Ein Bit ist die kleinste Informationseinheit, also der Unterschied zwischen einer 1 und einer 0. Dem Informationsgehalt eines Worts aus 8 Bit hat man den Namen Byte gegeben. Unter einem Kilobyte versteht man nun nicht etwa 1000 Byte, sondern $2^{10} = 1024$ Byte, und entsprechend sind 1 MB genau $2^{20} = 1\,048\,576$ Byte.

Große Zahlen

Zum Rechnen mit großen Einheiten benutzt man eher Zehnerpotenzen als Vorsilben. Dazu stellt man Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise (auch Normdarstellung genannt) dar, schreibt sie also als Produkt einer Dezimalzahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz. So gilt etwa

$$300\,000 = 3 \cdot 10^5 \qquad 2{,}1 \cdot 10^3 = 2100,$$
$$4\,125 = 4{,}125 \cdot 10^3 \qquad 3{,}14 \cdot 10^7 = 31\,400\,000$$

Um die Zahl $32{,}1 \cdot 10^8$ in wissenschaftlicher Schreibweise darzustellen, dividieren wir die Dezimalzahl 32,1 durch 10 (Komma um eine Stelle nach links schieben) und hängen zum Ausgleich an die Zehnerpotenz eine 0 an, ersetzen die 10^8 also durch 10^9:

$$32{,}1 \cdot 10^8 = 3{,}21 \cdot 10^9.$$

Um zwei Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise zu multiplizieren, multipliziert man die beiden Dezimalzahlen, addiert die Hochzahlen, und verschiebt ggf. noch das Komma, damit das Produkt wieder die gebräuchliche Form hat.

Beispiel. Um das Produkt $3 \cdot 5 \cdot 10^9$ zu berechnen, multiplizieren wir $3 \cdot 5 = 15$ und schreiben $15 \cdot 10^9 = 1{,}5 \cdot 10^{10}$.

Entsprechend ist

$$4 \cdot 10^8 \cdot 2{,}1 \cdot 10^9 = 8{,}2 \cdot 10^{17}.$$

Die Addition der Hochzahlen rührt daher, dass man bei der Multiplikation $100 \cdot 1000$ ja auch nur die Anzahl der Nullen addiert, und wenn man diese Zahlen in

wissenschaftlicher Schreibweise darstellt, wird genau diese Addition vorgenommen: $100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$. Bei der Division von Zehnerpotenzen werden die Hochzahlen entsprechend subtrahiert: es ist ja $\frac{100\,000}{100} = 1000$, da zwei Nullen gekürzt werden, folglich ist $10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3 = 1000$.

Satz 2.1. *Das Produkt der beiden Zehnerpotenz* 10^m *und* 10^n *erhält man, indem man die Hochzahlen addiert:*

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}.$$

Entsprechend werden diese Potenzen dividiert, indem man die Hochzahlen subtrahiert:

$$10^m : 10^n = 10^{m-n}.$$

Zwei Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise lassen sich nur dann direkt addieren, wenn die Zehnerpotenz dieselbe ist: natürlich ist $3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = 7 \cdot 10^5$. Sind die Potenzen nicht gleich und unterscheiden sie sich nur wenig, kann man sie durch Kommaverschiebungen gleich machen: $3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 = 3 \cdot 10^6 + 0{,}5 \cdot 10^6 = 3{,}5 \cdot 10^6$. Sind die Zehnerpotenzen sehr verschieden, kann man in der Regel die kleinere einfach weglassen: $3 \cdot 10^6 + 2 \approx 3 \cdot 10^6$; das genau Ergebnis wäre $3\,000\,000 + 2 = 3\,000\,002$.

Beim Ziehen von Quadratwurzeln gilt es zu beachten, dass $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ gilt, also $\sqrt{10^{2n}} = 10^n$: Zehnerpotenzen, die Quadratzahlen sind, haben eine gerade Anzahl von Nullen, und diese werden beim Ziehen der Quadratwurzel halbiert. Entsprechend gilt $\sqrt{9 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^3 = 3\,000$. Bei $\sqrt{1{,}6 \cdot 10^9}$ muss man erst das Komma verschieben: Wegen $1{,}6 \cdot 10^9 = 16 \cdot 10^8$ (den ersten Faktor haben wir mit 10 multipliziert, den zweiten zum Ausgleich durch 10 geteilt) ist $\sqrt{1{,}6 \cdot 10^9} = \sqrt{16 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^4$.

Pythagoreische Tripel

Im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras taucht vor allem das Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 auf, das wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ rechtwinklig ist. Jedes Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, welche der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügen, nennt man ein pythagoreisches Tripel. Wir betrachten nun folgende Zahlenreihen:

a	b	c
21	220	221
201	20200	20201
2001	2002000	2002001

Wir behaupten, dass jedes dieser Tripel ein pythagoreisches Tripel ist. Beim ersten lässt sich das leicht nachrechnen: es gilt ja $21^2 + 220^2 = 48\,841 = 221^2$. Auch die nächsten Tripel kann man (mit oder besser ohne Taschenrechner) erledigen. Um einzusehen, dass die Behauptung für alle Zahlen dieser Reihe richtig ist, muss man die auftretenden Zahlen erst einmal aufschreiben. In der linken Spalte stehen nacheinander die Zahlen

$$21 = 2 \cdot 10^1 + 1, \quad 201 = 2 \cdot 10^2 + 1, \quad 2001 = 2 \cdot 10^3 + 1, \ldots,$$

und es ist nicht schwer zu sehen, dass die n-te Zahl in dieser Reihe gleich $a_n = 2 \cdot 10^n + 1$ ist.

Die Zahlen in der mittleren Spalte sind etwas schwieriger aufzuschreiben. Hier finden wir

$$\begin{aligned} 220 &= 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1, \\ 20200 &= 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 20^2, \\ 2002000 &= 2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 20^3, \quad \text{also allgemein} \\ b_n &= 2 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n. \end{aligned}$$

Wegen $c_n = b_n + 1$ können wir nun daran gehen, die Behauptung zu beweisen:

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (2 \cdot 10^n + 1)^2 + (2 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n)^2 \\ &= \\ &= (2 \cdot 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1)^2 = c_n^2. \end{aligned}$$

Kleine Zahlen

Um auch kleine Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise darstellen zu können, müssen wir die Reihe

Giga	Mega	kilo
Milliarde	Million	Tausend
10^9	10^6	10^3

nach rechts fortsetzen. Die Einheit ohne Vorsilbe ist die Einheit selbst, die dem Faktor 1 entspricht, und es liegt nahe, die Folge der Hochzahlen 9, 6, 3 mit 0 fortzusetzen:

Giga	Mega	kilo	–
Milliarde	Million	Tausend	Eins
10^9	10^6	10^3	10^0

Wir definieren also $10^0 = 1$ aus rein praktischen Erwägungen heraus. Damit liefert nämlich die Division $10^3 : 10^3 = 10^{3-3} = 10^0$ ebenso das richtige Ergebnis wie die Multiplikation $1000 \cdot 1 = 10^3 \cdot 10^0 = 10^{3+0} = 10^3$. Unsere bisherigen Rechenregeln bleiben dadurch auch für Multiplikation und Division mit 1 richtig.

Es ist auch nicht schwer zu erraten, wie die obige Tabelle weiter fortzusetzen ist:

Giga	Mega	kilo	–	milli	mikro	nano
Milliarde	Million	Tausend	Eins	Tausendstel	Millionstel	Milliardstel
10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Daneben gibt es eine ganze Reihe weiterer Vorsilben, etwa centi (für den Hundertsten Teil, etwa bei cm).

Dieses Schema passt auch wunderbar mit den bisher gefundenen Regeln überein: bei der Division von Zehnerpotenzen musste man die Hochzahlen subtrahieren, und die Subtraktion der Hochzahl 3 (also die Division durch $10^3 = 1000$) ist dasselbe wie die Addition der Hochzahl -3 (also die Multiplikation mit $10^{-3} = \frac{1}{1000}$).

Natürlich führen wir negative Hochzahlen nicht nur für Vielfache der 3 ein, sondern ganz allgemein:

n	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
10^n	10 000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001

Wir setzen also $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ und bemerken ganz ausdrücklich, dass negative Hochzahlen nichts mit dem Vorzeichen der Zahl zu tun haben: es ist $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ und $-10^{-1} = -\frac{1}{10} = -0{,}1$.

Übungen

2.1 Schreibe in wissenschaftlicher Schreibweise:

a) die Lichtgeschwindigkeit 300 000 km/s;

b) die Entfernung Erde – Mond 384 000 km;

c) die Entfernung Erde – Sonne 150 Millionen km.

d) die Staatsschulden Deutschlands 2 242 000 000 000 Euro

2.2 Schreibe in wissenschaftlicher Schreibweise:

a) 21 000	b) 215 000	c) $220 \cdot 10^3$
d) $0{,}34 \cdot 10^5$	e) 0,00932	f) 0,100
g) 0,034	h) 0,0000047	i) $313 \cdot 10^{-4}$

2.3 Verwandle in Dezimalzahlen:

a) $2 \cdot 10^3$	b) $3 \cdot 10^{-2}$	c) $1{,}4 \cdot 10^5$
d) $2{,}1 \cdot 10^{-3}$	e) $2{,}4 \cdot 10^{-2}$	f) $2 \cdot 10^0$

2.4 Berechne:

a) $10^6 \cdot 10^2$	b) $10 \cdot 10^5$	c) $10^9 : 10^4$
d) $(4 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^7)$	e) $2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^4$	f) $4 \cdot 10^8 : (2 \cdot 10^3)$
g) $10^6 + 10^5$	h) $5 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{12}$	i) $2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^8$

2.5 Wenn man ein Papier der Dicke 0,1 mm 30mal falten könnte, wie dick wäre es dann?

2.6 Wenn man die Staatsschulden Deutschlands (vgl. Übung 2.1) in 10-Euro Scheinen aufstapeln würde, wie hoch würde dieser Turm, wenn ein Schein eine Dicke von 0,1 mm hat?

2.7 Ein Autoreifen verliert etwa 1 cm Profil auf 60.000 km. Berechne den Profilverlust auf 1 km.

2.8 Die Venus ist etwa 0,7 AE (die Astronomische Einheit ist die mittlere Entfernung von Erde und Sonne) von der Sonne entfernt. Wie nahe (in km) kann die Venus der Erde kommen?

Hierbei nehmen wir an, dass die Bahnen von Erde und Venus Kreisbahnen in derselben Ebene sind. Dies ist zwar nur angenähert richtig, die Größenordnungen bleiben davon aber unberührt.

2.9 Wie lange braucht das Licht vom Mond bis zur Erde (vgl. Übung 1) ? Wie lange braucht es von der Sonne bis zur Erde?

2.10 Ein Lichtjahr ist die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Der nächste Stern, Alpha Centauri, ist 4,3 Lichtjahre von uns entfernt. Rechne diese Entfernung in km um.

Wie groß ist die Entfernung bis zur Andromeda-Galaxis, der uns am nächsten gelegenen großen Galaxie, von der das Licht bis zu uns 2,2 Millionen Jahre braucht?

2.11 Die Masse eines Wasserstoffatoms ist $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg, die eines Sauerstoffatoms etwa 16mal so groß. Wie viele Wassermoleküle enthält ein Liter Wasser?

2.12 Ein Sauerstoffatom hat die 16fache, ein Stickstoffatom die 14fache Masse eines Wasserstoffatoms. Unsere Atemluft besteht grob aus 20 % Sauerstoff O_2 und 80 % Stickstoff N_2. Die Luft hat am Boden bei normalen Temperaturen und normalem Druck eine Dichte von 1,2 kg/m^3. Wie viele Moleküle Sauerstoff bzw. Stickstoff enthält 1 Liter Luft? Wie groß können diese Moleküle höchstens sein?

2.13 Die Sonne produziert ihre Energie durch Kernfusion: vier Wasserstoffkerne (Protonen) werden bei sehr hohen Temperaturen und sehr hohem Druck zu einem Heliumkern verschmolzen. Dabei ist die Masse eines Heliumkerns um $0{,}048 \cdot 10^{-27}$ kg kleiner als die Summe der Massen der Wasserstoffkerne. Diese Masse m wird bei der Kernfusion nach Einsteins berühmter Gleichung $E = mc^2$, wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet, in Energie umgewandelt.

Wie viele Wasserstoffatome müssen pro Sekunde verschmelzen, um den Energieausstoß der Sonne von $3{,}86 \cdot 10^{26}$ Watt zu erklären? Wie viele Tonnen Masse verliert die Sonne pro Sekunde allein durch die Kernfusion?

Die Sonne hat eine Masse von $2 \cdot 10^{30}$ kg und besteht zu % aus Wasserstoff. Wie lange reicht der Brennstoff maximal?

Die wirkliche Lebensdauer der Sonne ist viel kleiner, da die Kernfusion zusammenbricht, wenn der Wasserstoffanteil unter eine bestimmte Grenze fällt.

2.14 (ZK 2003) Wenn man die Zahlen $u = (10^{10})^{10}$ und $v = 10^{10^{10}}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Wie viele Stellen haben die Zahlen u bzw. v?

Ein Drucker gibt 150 Ziffern pro Sekunde aus. Wie lange braucht er ungefähr, um die ausgeschriebene Zahl u bzw. v zu drucken?

2.15 Man nehme die Erde als Kugel mit einem Unfang von 40 000 km an und denke sich ein Seil um den Äquator gespannt. Dieses Seil wird dann um 1 m verlängert und gleichmäßig so weit wie möglich hochgezogen, sodass es knapp über dem Erdboden wieder einen Kreis bildet. Wie hoch ist das Seil über dem Boden?

2.16 Jetzt wird ein reißfestes Eisenseil um den Äquator gespannt. Wenn die Temperatur T um den Betrag ΔT sinkt, dann zieht sich das Seil nach dem Gesetz

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} \approx \alpha \Delta T$$

zusammen, wobei ℓ die Länge und $\Delta \ell$ die Verkürzung des Seils bezeichnet und α der Längenausdehnungskoeffizient von Eisen ist, nämlich $\alpha \approx 1{,}2 \cdot 10^{-5}/°\mathrm{C}$.

Wie tief zieht sich das Seil in den Boden, wenn die Temperatur um 1° C sinkt?

2.17 Konstruiere aus der Kubikzahl $1331 = 11^3$ nach obigem Muster eine Folge von Kubizahlen, welche nur die Ziffern 1, 3 und Nullen besitzen.

2.18 Rechne nach, dass die folgenden Zahlen eine Reihe pythagoreischer Tripel bilden:

a	b	c
41	840	841
401	80400	80401
4001	8004000	8004001

Wie lautet das n-te Tripel in dieser Reihe? Zeige, dass es ebenfalls pythagoreisch ist.

2.2 Die Potenzgesetze für natürliche Exponenten

In diesem Abschnitt werden wir die Gesetze für Potenzen fromulieren, deren Hochzahlen natürliche Zahlen sind. Später werden wir auch Potenzen mit negativen und gebrochenen Zahlen einführen, und zwar so, dass diese Potenzgesetze erhalten bleiben.

Potenzen mit gleicher Grundzahl

Potenzen mit kleinen Hochzahlen kennen wir bereits: es ist $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$ und $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Potenzen sind also Produkte einer Zahl mit sich selbst, und die Schreibweise

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$$

ist erst einmal nur eine Abkürzung. Wir nennen a die Grundzahl (die Basis), n die Hochzahl (den Exponenten), und a^n die n-te Potenz von a.

Wenn man sich unsicher ist, wie man mit Potenzen zu rechnen hat, kann man (zumindest bei kleinen Exponenten n) immer hinschreiben, was die Potenz bedeutet:

$$\begin{aligned} a^1 \cdot a^2 &= a \cdot (a \cdot a) = a^3, \\ a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5. \end{aligned}$$

Es ist an dieser Stelle angebracht, mit einem häufigen Missverständnis aufzuräumen: während man Produkte von Summen wie etwa $2(a + b)$ mit dem Distributivgesetz umformen kann zu $2(a + b) = 2a + 2b$, darf man bei $2 \cdot ab = 2(ab) = 2ab$ nicht jeden Faktor in der Klammer mit 2 multiplizieren, denn es gilt ja $2 \cdot (ab) = ab + ab = 2ab$.

Auch bei $a^5 \cdot a^7$ kann (und sollte) man sich vorstellen, dass zuerst 5mal der Faktor a dasteht und dann noch 7mal, daher steht a im Produkt insgesamt 12mal da: $a^5 \cdot a^7 = a^{5+7} = a^{12}$. Das ist auch schon unser erstes Potenzgesetz:

Satz 2.2. *Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem man die Grundzahl beibehält und die Hochzahlen addiert:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Im wesentlichen addiert man nur die Anzahl der Faktoren:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}} = \underbrace{a \cdots a}_{m+n \text{ mal}}.$$

Bei Produkten wie $2a^2 \cdot 3a^3$ darf man die Reihenfolge der Faktoren vertauschen; es ist also

$$2 \cdot a^2 \cdot 3 \cdot a^3 = 2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a^3 = 6 \cdot a^5.$$

Wer verstanden hat, was eine Potenz a^m bedeutet und wie man Produkte multipliziert und sich daran erinnert, wenn so ein Produkt auftaucht, wird dies automatisch richtig machen. Man kann sich natürlich auch an die entsprechende Regel bei Zehnerpotenzen erinnern, wo die Addition der Hochzahlen in einem Produkt einfach der Addition der Nullen entspricht.

Eine anderer Fehler ist $2 \cdot 2^3 = 4^3$ oder Ähnliches: wenn man sich vor Augen hält, dass $2 \cdot 2^3 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^4$ bedeutet, kann man auf diesen Unsinn gar nicht erst kommen.

Ebenfalls wichtig ist folgende Übereinkunft: bei Rechenausdrücken, in denen Produkte und Potenzen vorkommen, wird zuerst die Potenz und dann das Produkt berechnet. Der Ausdruck $2a^2$ bedeutet also $2 \cdot a \cdot a$ und nicht $(2a)^2 = 4a^2$. Sinnn dieser Regelung ist, dass man dadurch Klammern einsparen kann. Insbesondere ist auf diese Regelung zu achten, wenn es um Ausdrücke der Form -2^4 geht: nach unserer Übereinkunft ist dies als $-2^4 = -(2^4) = -16$ zu lesen, während bekanntlich $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$ ist.

Zweites Potenzgesetz. Zum ersten Potenzgesetz, das die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Grundzahl regelt, gehört ein zweites, das sich mit der Division befasst. Wir haben etwa

$$5^4 : 5^1 = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3,$$
$$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 2^2,$$

da wir beim ersten Bruch eine 5 und beim zweiten dreimal die 2 kürzen können. Damit ist klar, wie das zweite Potenzgesetz formuliert werden muss:

Satz 2.3. *Potenzen mit gleicher Grundzahl werden dividiert, indem man die Grundzahl beibehält und die Hochzahlen subtrahiert:*

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Dabei müssen wir uns (vorläufig) auf den Fall $m > n$ beschränken, weil wir negative Hochzahlen erst nachher besprechen werden. In diesem Fall ist das zweite Potenzgesetz einfach die bekannte Regel zum Kürzen von Brüchen:

$$a^5 : a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2,$$

oder allgemein

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{m \text{ mal}}}{\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}} = \underbrace{a \cdots a}_{m-n \text{ mal}},$$

da wir n Faktoren a oben und unten wegkürzen können und dann eben $m-n$ Faktoren übrig bleiben.

Der häufigste Fehler beim Dividieren von Potenzen mit gleicher Grundzahl tritt auf, wenn man etwa $a^m : a^{m-1}$ zu bestimmen hat. Stellt man sich diesen Quotienten als Bruch vor, in dessen Zähler m mal und in dessen Nenner $m-1$ mal der Faktor a steht, dann sieht man, dass man den ganzen Nenner wegkürzen kann und zum Schluss ein a im Zähler übrig bleibt. Dasselbe Ergebnis liefert das zweite Potenzgesetz:

$$a^m : a^{m-1} = a^{m-(m-1)} = a^{m-m+1} = a^1 = a.$$

Allerdings muss man dabei beachten, dass um jede Hochzahl eine „unsichtbare“ Klammer steht, die man nicht weglassen darf, wenn davor ein Minuszeichen steht. Nichtbeachtung dieser Klammer führt zum falschen Ergebnis $a^m : a^{m-1} = a^{m-m-1} = a^{-1}$ (und dieses Ergebnis ist falsch, wie das Beispiel $2^4 : 2^{4-1} = 2^4 : 2^3 = 2$ zeigt).

Wenn sich Schüler unsicher wären, wie man $a^m : a^{m-1}$ rechnet (die allermeisten, die es falsch machen, sind sich nicht unsicher), dann könnten sie in den Ausdruck $a^m : a^{m-1}$ einfach nacheinander $m = 2, 3, 4$ usw. einsetzen und würden sehen, dass

$$a^2 : a^1 = a, \quad a^3 : a^2 = a, \quad a^4 : a^3 = a$$

ist, was ja zumindest nahelegt, dass hier für jedes m der Wert a herauskommt.

Zum Vereinfachen von Ausdrücken oder zum Umstellen von Formeln ist es ganz wichtig, diese Potenzgesetze auch in einer komplizierteren Umgebung richtig anwenden zu können. So muss man in der Lage sein, aus $x^4 + x^9$ die größte Potenz von x auszuklammern, die in beiden Summanden steht: $x^4 + x^9 = x^4(1 + x^5)$. Nach dem Ausmultiplizieren muss wieder dasselbe dastehen wie zu Beginn. Entsprechendes gilt für $12a^5 + 18a^3 = 6a^3(2a^2 + 3)$. Bleiben Ausdrücke zurück, die keinen offensichtlichen Faktor mehr besitzen, so ist zu prüfen, ob eine binomische Formel vorliegt, wie etwa in den folgenden Beispielen:

$$\begin{aligned} 3a^3 + 12a^2b + 12ab^2 &= 3a(a^2 + 4ab + 4b^2) = 3a(a + 2b)^2, \\ 2a^5 - 8a^3 &= 2a^3(a^2 - 4) = 2a^3(a - 2)(a + 2). \end{aligned}$$

Das Erkennen von binomischen Formeln erfordert keine höhere Intelligenz, sondern nur Übung. Wir werden in diesem Schuljahr bei einigen Anlässen Gelegenheit haben, binomische Formeln gewinnbringend einzusetzen.

Übungen

2.1 Rechenübungen.

1. Berechne nacheinander $2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}$.
2. Berechne 3^6.
3. Berechne die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{/}1024$ durch fortgesetztes Halbieren.

2.2 Vereinfache die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Potenzgesetze.

a) $x^2 \cdot x^4$	b) $2x^5 \cdot 3x^3$	c) $2 \cdot 2^9$
d) $x^a \cdot x^{2a}$	e) $3x^2 \cdot 4x^2$	f) $x \cdot x^4 + 2x^5$

2.3 Vereinfache

a) $\frac{x^8}{x^2}$	b) $x^3 : x^2$	c) $x^m : x^{m-3}$
d) $\frac{2x^3 \cdot 3x^4}{5x^7}$	e) $a^{4m+3n} : a^{3m+4n}$	f) $\frac{8x^{2m+1}}{2x^{m+1}}$

2.4 Faktorisiere so weit wie möglich.

a)	$x^6 + x^2$	b)	$12x^2 + 18x^3$	c)	$x^2 - 4$
d)	$x^6 - x^2$	e)	$27x^5 - 12x^3$	f)	$4x^3 + 8x^2 + 4x$
g)	$16a^4 - 24a^3 + 9a^2$	h)	$5a^2b - 10ab + 5b^2$	i)	$4a^2b^2 - 1$

Potenzen mit gleicher Hochzahl

Auch Potenzen mit gleicher Hochzahl lassen sich zusammenfassen; diese Art von Umformung kommt aber deutlich seltener vor als diejenige von Potenzen mit gleicher Grundzahl. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 3^4 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \\ &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4, \end{aligned}$$

und das funktioniert natürlich allgemein:

Satz 2.4. *Potenzen mit gleicher Hochzahl werden multipliziert, indem man die Hochzahl beibehält und die Grundzahlen multipliziert:*

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m.$$

Selbstverständlich bleibt alles richtig, wenn wir das Ganze rückwärts rechnen: aus $6^4 = 2^4 \cdot 3^4$ erhalten wir nach Division durch 2^4 die Gleichung $6^4 : 2^4 = 3^4$:

Satz 2.5. *Potenzen mit gleicher Hochzahl werden dividiert, indem man die Hochzahl beibehält und die Grundzahlen dividiert:*

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Wichtig ist, dass bei Umformungen von Produkten mit gleicher Grundzahl die Grundzahl erhalten bleibt, bei Produkten mit gleicher Hochzahl die Hochzahl. Produkte, bei denen Grundzahlen und Hochzahlen gleich sind, kann man daher auf zwei verschiedene Arten umformen; so ist

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 2^4 &= 2^{4+4} = 2^8 && \text{nach dem ersten Potenzgesetz,} \\ 2^4 \cdot 2^4 &= (2 \cdot 2)^4 = 4^4 && \text{nach dem zweiten.} \end{aligned}$$

Welche Umformung die bessere ist, hängt von der Situation ab. Wichtig ist allerdings, dass je nach Wahl des Potenzgesetzes entweder die Grundzahl oder die Hochzahl gleich bleibt.

Potenzen von Potenzen

Das letzte Potenzgesetz dreht sich um Potenzen von Potenzen. Eigentlich ist es, wie die andern auch, überflüssig, wenn man weiß, was man tut. Denn selbstverständlich ist $(2^4)^3$ nichts anderes als $(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{4\cdot 3} = 2^{12}$, folglich lautet das entsprechende Potenzgesetz so:

Satz 2.6. *Bei Potenzen von Potenzen werden die Hochzahlen multipliziert:*

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} = a^{mn}.$$

Zu achten hat man bei der Anwendung darauf, dass etwa

$$(2a^2)^3 = 2a^2 \cdot 2a^2 \cdot 2a^2 = 2^3 a^{2\cdot 3} = 2^3 a^6$$

ist, also die dritte Potenz sowohl auf den Faktor 2 ebenso wie auf den Faktor a^2 anzuwenden ist. Insbesondere ist $(-a^2)^4 = a^8$, weil das Minuszeichen viermal auftritt.

Zu Potenzen von Potenzen ist noch zu sagen, dass in Ausdrücken wie 2^{2^3} von oben nach unten gerechnet wird (eine Regel, die man zum Einsparen von Klammern festgelegt hat – genausogut hätte man festlegen können, dass man von unten nach oben rechnet). Es ist also $2^{2^3} = 2^8 = 256$, aber $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

Umformen

Treten in Aufgaben Potenzen von 4 und 8 auf, so ist es zum Anwenden der Potenzgesetze oft angebracht, diese mit dem fünften Potenzgesetz in Potenzen von 2 zu verwandeln:

$$2^3 \cdot 4^2 \cdot 8^4 = 2^3 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{12} = 2^{19}.$$

Entsprechendes gilt für Potenzen von 9 und 27 usw.

Auch beim Vereinfachen von Brüchen ist diese Idee anzuwenden: so ist etwa

$$\frac{10^4 \cdot 6^5}{4^3 \cdot 15^5} = \frac{(2\cdot 5)^4 \cdot (2\cdot 3)^5}{(2^2)^3 \cdot (3\cdot 5)^5} = \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 2^5 \cdot 3^5}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^5} = 2^{4+5-6} 3^{5-5} 5^{4-5} = 2^3 5^{-1} = \frac{8}{5}.$$

Selbstverständlich geht es bei solchen Aufgaben nicht darum, im täglichen Leben auftretende Brüche zu berechnen, sondern einzig und allein um das Einüben von Potenzgesetzen in vielen verschiedenen Situationen.

Übungen

2.1 Berechne:

a) $10^5 \cdot 10$ b) $10^6 : 10$

c) $5^{20} : 5$ d) $2 \cdot 10^6 : 10$

2.2 Vereinfache:

a) $x^2 \cdot x^3$ b) $x^{-2} \cdot x^3$ c) $\frac{x^3}{x}$
d) $x^a \cdot x^a$ e) $x^n : x^n$ f) $\frac{a^2 \cdot a^{-1}}{a^3}$

2.3 Schreibe als Produkt:

a) $x^2 + x^5$ b) $3y + 3y^2$ c) $a^2 - b^2$
d) $a^4 - b^4$ e) $a^{-2} - b^{-2}$ f) $a^4 + 2a^2b + b^2$

2.4 Schreibe als Produkt:

a) $a^2 - 4a^4$ b) $a^2 + 2ab + b^2$ c) $a^4 + 2a^2b + b^2$
d) $a^4 - 2a^2b^{-3} + b^{-6}$ e) $a^{-2} - b^4$ f) $81 - 25$

2.5 Berechne (ohne Taschenrechner):

a) 2^4 b) 3^3 c) 5^3
d) $\sqrt{2}^2$ e) $\sqrt{2}^4$ f) $\sqrt{3}^6$

2.6 Berechne (ohne Taschenrechner):

a) $(-1)^2$ b) $(-2)^4$ c) -3^2
d) $1{,}2^2$ e) $(-\sqrt{5}\,)^6$ f) $\sqrt{2}^5$

2.7 Schreibe als Potenz mit möglichst großer Hochzahl:

a) 27 b) 32 c) 64
d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{9}{16}$ f) $\frac{1}{81}$

2.8 Schreibe als Potenz mit möglichst großer Hochzahl:

a) 0,01 b) 0,04 c) 0,16
d) 0,064 e) 0,0009 f) 0,81

2.9 Vereinfache:

a) $2^5 \cdot 2^3$ b) $3^4 \cdot 3^m$ c) $2^m \cdot 2^n$
d) $a^{m+1}a^{n-m}$ e) $a^m b^n a^{2+m} b^{4-n}$ f) $x^{2m-1}x^{2-m}$

2.10 Vereinfache:

a) $2^m \cdot 4^{m+1}$ b) $3^{2m-1} : 9^m$ c) $3^{2m-1} - 9^{2m}$
d) $2^{2m} - 4^m$ e) $2^{3m+1} - 8^m$ f) $3 \cdot 2^n - 2^{n+1}$

2.11 Klammere aus:

a) $8x + 16y$ b) $2^5a - 2^7b$ c) $2^{m-1}r + 2^{m+1}s$
d) $3^{2m-1} - 9^m x$ e) $x^2 - 4y^2$ f) $2^{2m}x^2 - 3^{4m}y^2$
g) $r^2 + 4rs + 4s^2$ h) $2^{3m} - 4^m$ i) $2^{4m}a^2 + 2^{2m+1}ab^m + b^{2m}$

2.12 Vereinfache:

a) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ b) $\frac{a-b}{b-a}$ c) $\frac{x^2-y^2}{y-x}$

d) $\frac{r^2-4s^2}{r^2+4rs+4s^2}$ e) $\frac{4^7\cdot 6^9}{2^{19}\cdot 3^8}$ f) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+xy}$

2.3 Potenzen mit negativen Exponenten

Potenzen mit negativen Exponenten haben wir im Zusammenhang mit Zehnerpotenzen bereits kennengelernt: 10^{-3} beispielsweise haben wir definiert als $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$. Dies machen wir allgemein: wir setzen

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Bei dieser Festlegung bleiben die Potenzgesetze gültig, wie man nachrechnen kann; es ist ja, wenn $m > n$ ist,

$$a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)},$$

wobei wir im ersten Schritt die Definition von a^{-n} und im zweiten das erste Potenzgesetz für positive Exponenten benutzt haben. Im Falle $m < n$ haben wir entsprechend

$$a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Auch hier muss man negative Vorzeichen und negative Exponenten fein säuberlich auseinanderhalten: es ist

$$4^{-2} = \frac{1}{16}, \quad -4^{-2} = -\frac{1}{16} \quad \text{und} \quad (-4)^{-2} = \frac{1}{16}.$$

2.1 Berechne (ohne Taschenrechner):

a) 2^{-4} b) 3^{-2} c) $\sqrt{2}^{-2}$

d) $\sqrt{3}^{-4}$ e) $(-1)^2$ f) $(-2)^4$

g) 1^{-2} h) $(-\sqrt{5}\,)^{-2}$ i) 10^{-2}

2.2 Schreibe als Potenz (neg. Hochzahlen):

a) $\frac{1}{27}$ b) $\frac{1}{32}$ c) 0,01

d) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{64}$ f) 0,04

2.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Im letzten Schuljahr haben wir Quadratwurzeln eingeführt. Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl, die mit sich selbst malgenommen a ergibt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

Quadratwurzeln als Potenzen

Wir wollen einmal die Potenzen von 3 und 9 nebeneinander schreiben:

$$\begin{array}{rcrrcr}
3^0 & = & 1 & 9^0 & = & 1 \\
3^1 & = & 3 & & & \\
3^2 & = & 9 & 9^1 & = & 9 \\
3^3 & = & 27 & & & \\
3^4 & = & 81 & 9^2 & = & 81 \\
3^5 & = & 243 & & & \\
3^6 & = & 729 & 9^3 & = & 729
\end{array}$$

Wenn wir auch die ungeraden Potenzen von 3 wie 3, 27 und 243 als Potenzen von 9 schreiben möchten, dann sollte klar sein, wie wir vorzugehen haben:

$$\begin{array}{rcrrcr}
3^0 & = & 1 & 9^0 & = & 1 \\
3^1 & = & 3 & 9^{\frac{1}{2}} & = & 3 \\
3^2 & = & 9 & 9^1 & = & 9 \\
3^3 & = & 27 & 9^{\frac{3}{2}} & = & 27 \\
3^4 & = & 81 & 9^2 & = & 81 \\
3^5 & = & 243 & 9^{\frac{5}{2}} & = & 243 \\
3^6 & = & 729 & 9^3 & = & 729
\end{array}$$

Wir setzen also $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$; das passt mit den Potenzgesetzen gut zusammen: es ist ja einerseits $(9^{\frac{1}{2}})^2 = 9^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 9^1 = 9$, andererseits auch $(9^{\frac{1}{2}})^2 = (\sqrt{9}\,)^2 = 3^2 = 9$.

Auf leicht anderem Weg hätten wir 3 als Potenz von 9 auch einfach so erhalten können: wenn $3 = 9^x$ ist und die bisherigen Potenzgesetze weiter gelten sollen, dann muss $3 = 9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ sein, und Vergleich der Hochzahlen liefert $1 = 2x$, also $x = \frac{1}{2}$.

Allgemein setzen wir $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, wobei natürlich $a \geq 0$ sein muss, damit die Quadratwurzel existiert. Für die Festlegung aller anderen Potenzen mit halbzahliger Hochzahl fordern wir die Gültigkeit der Potenzgesetze auch für solche Hochzahlen. Dann wird nämlich $9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$ wie gewünscht.

Zum Rechnen sind gebrochene Hochzahlen nur dann hilfreich, wenn man Ausdrücke mit verschiedenen Wurzeln zu vereinfachen hat. Der eigentliche Zweck der Einführung gebrochener Hochzahlen wird sich erst im nächsten Schuljahr offenbaren.

Kubikwurzeln

Quadratwurzeln treten auf, wenn man die Seitenlänge eines Quadrats mit gegebenem Flächeninhalt berechnet: ein Quadrat mit Flächeninhalt 16 m^2 hat eine Kantenlänge von 4 m wegen $\sqrt{16} = 4$, und ein Quadrat mit Flächeninhalt 5 hat eine Kantenlänge von $\sqrt{5}$, wobei $\sqrt{5}$ diejenige positive reelle Zahl ist, die mit sich selbst malgenommen 5 ergibt.

Entsprechend tauchen Kubikwurzeln beim Berechnen der Kantenlänge eines Würfels mit gegebenem Volumen auf: Ein Würfel mit Volumen 8 m^3 hat eine Kantenlänge von 2 m wegen $2^3 = 8$. Allgemein nennen wir die Zahl, deren dritte Potenz gleich einer gegebenen *positiven* reellen Zahl a ist, die Kubikwurzel von a und schreiben $\sqrt[3]{a}$. Entsprechend ist $\sqrt[4]{a}$ diejenige Zahl, deren 4. Potenz gleich a ist.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[4]{16} = 2$$
$$\sqrt[3]{64} = 4 \qquad \sqrt[5]{32} = 2$$
$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$$

Wenn man eine dritte oder vierte Wurzel aus einer Zahl zu ziehen hat, die keine dritte bzw. vierte Potenz ist, muss man den Taschenrechner zu Hilfe nehmen. Weiter unten werden wir aber zeigen, dass man gute Näherungen durchaus auch von Hand berechnen kann.

Ist q ungerade, darf a auch negativ sein: $\sqrt[3]{-8} = -2$ wegen $(-2)^3 = -8$. Lässt man dies zu, muss man beim Rechnen mit Potenzgesetzen allerdings aufpassen, weil jetzt, wenn man unbedarft rechnet, unangenehme Dinge geschehen können:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Das Problem ist, dass wir beim Wechsel von der Hochzahl $\frac{1}{3}$ zur Hochzahl $\frac{2}{6}$ einmal quadriert und einmal die Quadratwurzel gezogen haben; diese Operationen heben sich auf, wenn der Radikand positiv ist, aber nicht, wenn er negativ ist. Beim Rechnen mit 3. und 5. Wurzeln aus negativen Zahlen sollte man also zuerst das Vorzeichen vor die Wurzel ziehen.

2.5 Übungen

2.1 Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen folgende Wurzeln?

(a) $< \sqrt{10} <$ (b) $< \sqrt[3]{16} <$

(c) $< \sqrt[3]{40} <$ (d) $< \sqrt[4]{20} <$

2.2 Es ist $0{,}7 < \sqrt{0{,}6} < 0{,}8$ wegen $\sqrt{0{,}49} < \sqrt{0{,}6} < \sqrt{0{,}64}$. Löse ebenso

a) $< \sqrt{0{,}2} <$ b) $< \sqrt{0{,}03} <$ c) $< \sqrt{0{,}001} <$

d) $< \sqrt{0{,}4} <$ e) $< \sqrt{0{,}004} <$ f) $< \sqrt{0{,}0002} <$

2.3 Vereinfache (alle Variablen sind positiv):

a) $\sqrt{a^2}$ b) $\sqrt{a^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3}$

d) $\sqrt[3]{a^6b^3}$ e) $\sqrt{a^2b^4}$ f) $\sqrt[4]{a^4b^{-12}}$

2.4 Vereinfache (alle Variablen sind positiv):

a) $\sqrt{a^5}\sqrt{a^{-3}}$ b) $\sqrt[3]{a^4} : \sqrt[3]{a}$ c) $\sqrt{2^{2m}}$

d) $\sqrt[3]{a^{6m+3}}$ e) $\sqrt[m]{2^m}$ f) $\sqrt[k]{b^{k^2+k}}$

2.5 Berechne:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{\sqrt{x^8}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}$ e) $\sqrt{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}}$

g) $\sqrt[n]{a^{2n}}$ h) $\sqrt[m]{a^m b^{-m}}$ i) $\sqrt[5]{32x^5}$

2.6 Berechne, falls möglich:

a) $16^{\frac{1}{2}}$ b) $64^{\frac{1}{2}}$ c) $-4^{\frac{1}{2}}$

d) $(-36)^{\frac{1}{2}}$ e) $-36^{\frac{1}{2}}$ f) $64^{\frac{1}{3}}$

g) $32^{\frac{1}{5}}$ h) $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$ i) $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$

2.7 Berechne, falls möglich:

a) $27^{\frac{2}{3}}$ b) $-25^{-\frac{1}{2}}$ c) $16^{\frac{3}{4}}$

d) $125^{-\frac{2}{3}}$ e) $8^{-\frac{4}{3}}$ f) $81^{\frac{3}{4}}$

g) $64^{\frac{5}{6}}$ h) $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$ i) $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}}$

2.8 Vereinfache so weit wie möglich:

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ b) $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$ c) $c^{\frac{1}{5}} \cdot c^{-\frac{1}{5}}$

d) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}}$ e) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ f) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{3}}$

g) $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}}$ h) $x^{\frac{3}{2}} : x$ i) $x : x^{\frac{1}{2}}$

2.9 Teilweises Ausziehen von Wurzeln:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt[3]{108}$

d) $\sqrt[3]{24}$ e) $\sqrt[4]{48}$ f) $\sqrt[5]{96}$

g) $\sqrt{4x^2}$ h) $\sqrt{9x^3}$ i) $\sqrt[3]{8x^4}$

2.10 Vereinfache.

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - \sqrt{3}$ b) $2\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$

c) $3\sqrt{5a^2} - a\sqrt{20}$ d) $2\sqrt{6x^2} + x^2\sqrt{24x^{-2}}$

Lösungen

2.1 Abschätzen von Wurzeln: zwischen welchen ganzen Zahlen liegen folgende Wurzeln?

Um $\sqrt{10}$ abzuschätzen, überlegt man sich, zwischen welchen Quadratzahlen 10 liegt. Wegen $9 < 10 < 16$ ist $3 < \sqrt{10} < 4$.

Entsprechend muss man bei $\sqrt[3]{16}$ mit dritten Potenzen arbeiten: $2^3 = 8$ ist zu klein, $3^3 = 27$ zu groß, also ist $2 < \sqrt[3]{16} < 3$ (TR: $\sqrt[3]{16} \approx 2{,}519\ldots$.

(a) $3 < \sqrt{10} < 4$ (b) $2 < \sqrt[3]{16} < 3$

(c) $6 < \sqrt[3]{40} < 7$ (d) $2 < \sqrt[4]{20} < 3$

2.2 Es ist $0{,}7 < \sqrt{0{,}6} < 0{,}8$ wegen $\sqrt{0{,}49} < \sqrt{0{,}6} < \sqrt{0{,}64}$. Alternativ: $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100}$ (der Nenner sollte das Quadrat einer 10er-Potenz sein); wegen $7^2 < 60 < 8^2$ ist also $0{,}7 = \frac{7}{10} < \sqrt{0{,}6} < \frac{8}{10} = 0{,}8$. Beachte, dass $0{,}7^2 = 0{,}49 < 0{,}6$ und $0{,}8^2 = 0{,}64 > 0{,}6$ ist.

(a) $0{,}4 < \sqrt{0{,}2} < 0{,}5$ (b) $0{,}1 < \sqrt{0{,}03} < 0{,}2$

(c) $0{,}03 < \sqrt{0{,}001} < 0{,}04$ (d) $0{,}6 < \sqrt{0{,}4} < 0{,}7$

(e) $0{,}06 < \sqrt{0{,}004} < 0{,}07$ (f) $0{,}01 < \sqrt{0{,}0002} < 0{,}02$

2.3 $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ bedeutet auch, dass man beim Ziehen der Quadratwurzel alle Hochzahlen halbieren muss.

a) $\sqrt{a^2} = a$ b) $\sqrt{a^4} = a^2$ c) $\sqrt[3]{a^3} = a$

d) $\sqrt[3]{a^6b^3} = a^2b$ e) $\sqrt{a^2b^4} = ab^2$ f) $\sqrt[4]{a^4b^{-12}} = ab^{-3} = \frac{a}{b^3}$

2.4 Produkte und Quotienten von Wurzeln kann man zusammenfassen: $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a^3} = \sqrt{a^5 \cdot a^3} = \sqrt{a^8} = a^4$. Alternativ: $\sqrt{a^5} \cdot \sqrt{a^3} = a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}} = a^4$.

a) $\sqrt{a^5}\sqrt{a^{-3}} = a$ b) $\sqrt[3]{a^4} : \sqrt[3]{a} = a$ c) $\sqrt{2^{2m}} = 2^m$

d) $\sqrt[3]{a^{6m+3}} = a^{2m+1}$ e) $\sqrt[m]{2^m} = 2$ f) $\sqrt[k]{b^{k^2+k}} = b^{k+1}$

2.5 Es ist $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

a) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2$ c) $\sqrt{\sqrt{x^8}} = x^2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} = a^2$ e) $\sqrt{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}} = \sqrt{ab}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}} = \frac{a}{b}$

g) $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$ h) $\sqrt[m]{a^m b^{-m}} = ab^{-1} = \frac{a}{b}$ i) $\sqrt[5]{32x^5} = 2x$

2.6 Beachte, dass $-a^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{a}$ und $(-a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a}$ ist. Entsprechend ist $-4^2 = -15$ und $(-4)^2 = 16$.

a) $16^{\frac{1}{2}} = 4$ b) $64^{\frac{1}{2}} = 8$ c) $-4^{\frac{1}{2}} = -2$

d) $(-36)^{\frac{1}{2}}$ ↯ e) $-36^{\frac{1}{2}} = -6$ f) $64^{\frac{1}{3}} = 4$

g) $32^{\frac{1}{5}} = 2$ h) $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ i) $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

2.7 Bei $a^{-\frac{2}{3}}$ muss man nacheinander den Kehrwert bilden ($a^{-1} = \frac{1}{a}$), die dritte Wurzel ziehen ($a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$) und dann Quadrieren ($a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}^2$)

a) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27}^2 = 9$ b) $-25^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}$ c) $16^{\frac{3}{4}} = 8$

d) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$ e) $8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$ f) $81^{\frac{3}{4}} = 27$

g) $64^{\frac{5}{6}} = 32$ h) $(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ i) $(\frac{4}{9})^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$

2.8 Vereinfache so weit wie möglich:

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$ b) $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = b$ c) $c^{\frac{1}{5}} \cdot c^{-\frac{1}{5}} = c^0 = 1$

d) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{5}{4}} = \sqrt{x}^3$ e) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}}$ f) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

g) $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$ h) $x^{\frac{3}{2}} : x = \sqrt{x}$ i) $x : x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

2.9 Teilweises Ausziehen von Wurzeln: $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$.

a) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$

d) $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$ f) $\sqrt[5]{96} = 2\sqrt[5]{3}$

g) $\sqrt{4x^2} = 2x$ h) $\sqrt{9x^3} = 3x\sqrt{x}$ i) $\sqrt[3]{8x^4} = 2x\sqrt[3]{x}$

2.10 Hier ist $\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32} = 5\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{5a^2} - a\sqrt{20} = a\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{6x^2} + x^2\sqrt{24x^{-2}} = 0$

2.6 Übungen

2.1 Klammere einen möglichst großen Faktor aus:

a) $14a + 21b$ b) $x^2 + 2xy$
c) $9x^3 + 12xy^2$ d) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^x$

2.2 Berechne ohne Taschenrechner:

a) -7^2 b) $(-a)^4$ c) $(-x^2)^3$
d) $x^2 \cdot x^5$ e) $x^{12} : x^4$ f) $x^m : x^{m-1}$

2.3 Berechne ohne Taschenrechner:

a) $2{,}1 \cdot 10^8 + 10^8$ b) $3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^7$
c) $4{,}2 \cdot 10^{18} : (2 \cdot 10^{12})$ d) $3 \cdot 10^{100} + 2 \cdot 10^{101}$

2.4 Berechne.

a) 2^6 b) $(-3)^2$ c) $(-1)^0$
d) 4^{-1} e) 10^{-3} f) $16^{\frac{1}{2}}$
g) $(\frac{2}{3})^{-2}$ h) $(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$ i) $-8^{\frac{1}{3}}$

2.5 Fasse zusammen.

a) $a^4 \cdot a^3$ b) $a^m \cdot a^{m+1}$ c) $a^5 : a^{-2}$
d) $a^k : a^{k-1}$ e) $(a^4)^5$ f) $(a^{\frac{1}{2}})^4$
g) $3^5 \cdot 9^2$ h) $4^7 \cdot 8^4$ i) $\frac{6^{15} \cdot 12^8 \cdot 10^9}{15^{12} \cdot 18^{11}}$

2.6 Schreibe in wissenschaftlicher Notation.

a) 40 000 b) 299 800 c) 0,0004
d) $2 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^8$ e) $2{,}4 \cdot 10^{-20} \cdot 5 \cdot 10^{40}$ f) $1{,}8 \cdot 10^{23} : 3 \cdot 10^6$

2.7 Vereinfache so weit wir möglich.

a) $\frac{a^4 - a^5}{a^2}$ b) $\frac{a^6 - a^3}{a^3 - 1}$
c) $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ d) $\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x - 2y}$

2.8 Vereinfache:

a) $\frac{a^4 b^5 c^6}{a^3 b^5 c^7}$ b) $\frac{x^2 - 25y^2}{x^2 + 10xy + 25y^2}$
c) $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x}$ d) $x^2 : \sqrt{x}$

2.9 Berechne:

a) $x^3 \cdot x^7$ b) $x^m : x^{m-3}$
c) $(9 \cdot 10^9) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^9$
e) $(x^4)^3$ f) $-(-x)^8$
g) -8^{-2} h) $(\frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}}$

2.10 Berechne:

a) 13 % von 110 b) $\frac{18}{15} : \frac{24}{25}$

c) $\sqrt{\frac{54}{24}}$ d) $\sqrt{64+36}$

2.11 Vereinfache so weit wie möglich:

a) $(x-2)^2 - (2-x)^2$ b) $3m(1-2m) - 2m(2m-1)$

c) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{18x}$ d) $\frac{x^3+3x^2y}{x+3y}$

2.12 Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}$ b) $\frac{6^7 \cdot 14^8}{21^7 \cdot 4^6}$

c) $\frac{ab^2-a^3}{ab-b^2}$ d) $\frac{a^3-6a^2b+9ab^2}{a^2-3ab}$

2.13 Berechne bzw. Vereinfache.

(a) $\frac{2^{m+n} \cdot 2^{m-n-1}}{4^{1+m}}$ (b) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^2}}$

(c) $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2}$ (d) $\frac{12^5 \cdot 10^{-4}}{6^6 \cdot 5^{-2}}$

(e) $x^5 \cdot x^9$ (f) $x^4y^2x^3y$

(g) $x^{3n-2} \cdot x^{2n-3}$ (h) $x^{2+3m} : x^{2-3m}$

(i) $2 \cdot 2^x$ (j) $(2^{n+2})^3$

(k) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[6]{x}$ (l) $(3^{r-1} + 26 \cdot 3^{r-1}) : 9$

(m) $\frac{3{,}41 \cdot 10^{12}}{2{,}17 \cdot 10^{15}}$ (n) $\frac{(2 \cdot 10^5)^3}{(3 \cdot 10^4)^4}$

2.14 Die Gleichung $2^{10} = 1024$ kann man benutzen, um große Potenzen von 2 abzuschätzen: aus $2^{10} \approx 10^3$ folgt z.B. $2^{20} \approx 10^6$, $2^{24} = 2^4 2^{20} \approx 16 \cdot 10^6$. Schätze ab (ohne TR): 2^{32}; 2^{41}; 2^{63} (die Anzahl der Reiskörner auf dem 64. Feld in der Legende). Vergleiche diese Abschätzungen mit den exakten Werten (mit TR).

2.15 Berechne bzw. vereinfache die folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$ b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) : \frac{5}{21}$ c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5} - \frac{2}{11} : \frac{12}{33}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{2}{7} : \frac{3}{7}$ e) $\frac{\frac{3}{7}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{5}}$ f) $\frac{41}{17} - \frac{5}{13} - \frac{7}{17} + \frac{18}{13}$

g) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}$ h) $\frac{3}{7} + \frac{5}{13} : \frac{7}{13}$ i) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

j) $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ k) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$ l) $\frac{r}{r+s} : \frac{s}{r+s}$

2.16 Berechne:

a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{0{,}04}$

d) $16^{\frac{1}{2}}$ e) $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$ f) -5^2

g) $3^8 \cdot 3^5$ h) $\frac{4{,}2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-3}}$ i) $4^5 \cdot 8^3$

j) $4^{-\frac{1}{2}}$ k) $(\frac{1}{3})^{-1}$ l) $(\frac{2}{5})^0$

2.17 Berechne:

a) $\sqrt{a^6}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt{0{,}16}$
d) $36^{\frac{1}{2}}$ e) $(\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}}$ f) -9^2
g) $5^{12} \cdot 5^5$ h) $\frac{6{,}2 \cdot 10^8}{3{,}1 \cdot 10^{-4}}$ i) $9^5 \cdot 27^3$
j) $16^{-\frac{1}{2}}$ k) $(\frac{1}{7})^{-1}$ l) $(-\frac{2}{5})^0$

2.18 Forme mit Hilfe der Potenzgesetze um:

a) $x^r \cdot x^{1-r}$ b) $a^{m+1} : a^{m-1}$
c) $(2^4)^5$ d) $3^7 \cdot 5^7$

2.19 Vereinfache den Bruch:

(a) $\frac{a^5 b^4 c^9}{(abc^2)^2}$ (b) $\frac{6^6 \cdot 10^4}{15^4 \cdot 4^5}$
(c) $\frac{a^3+6a^2b+9ab^2}{a^2+3ab}$ (d) $\frac{a^{m+2}}{a^{m-2}}$

2.20 Berechne bzw. vereinfache die folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{5}{12} - \frac{5}{18}$ b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{11}\right) : \frac{5}{33}$ c) $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5} - \frac{2}{11} : \frac{12}{33}$
d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} : \frac{4}{9}$ e) $\frac{\frac{3}{7}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{5}}$ f) $\frac{41}{17} - \frac{5}{14} - \frac{7}{17} + \frac{19}{14}$

2.21 Berechne bzw. vereinfache die folgenden Ausdrücke.

a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{5}$ b) $\frac{3}{7} + \frac{5}{13} : \frac{7}{13}$ c) $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$
d) $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$ e) $\frac{x+1}{x-y} - \frac{y+1}{x-y}$ f) $\frac{s}{t^2-u^2} : \frac{t}{t-u}$

2.22 Vereinfache bzw. berechne:

a) $\frac{a^2b^4-a^4b^2}{a^2-ab}$ b) $2^m \cdot 8^n$ c) $\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x+y}$
d) $\frac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2} : \frac{a-2b}{a+2b}$ e) $\frac{a^x-a^{x+2}}{a^{x+1}-a^x}$ f) $\frac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}}$

2.23 Vereinfache bzw. berechne:

a) $\frac{a^2b^3(16-a^2)}{a^3(4b^2-ab^2)}$ b) $\frac{x^n-x^{n+2}}{x^{n+1}+x^n}$ c) $\frac{x^{2k}+4x^k+4}{x^{2k}-4}$
d) $\frac{9y^{2m}-4}{3y^{m+1}-2y}$ e) $\frac{y^{2m}-14y^m+49}{y^{2m}-49}$ f) $\frac{9y^{2m}-4}{3y^{m+1}-2y}$

2.24 Kürze so weit wie möglich:

(a) $\frac{(2^4 \cdot 15^3)^2 \cdot 21}{5^8 \cdot 7^2 \cdot 12^6}$ (b) $\frac{(10a)^{21} \cdot 6^{27}}{81^7 \cdot (400a^2)^{11}}$
(c) $\frac{a^{-5}b^{-7}c^4}{a^3b^{-2}c^5} : \frac{ab^{-9}c^3}{a^9b^{-3}c^{-1}}$ (d) $\frac{(2xy^2z)^4}{a^2b^{-1}} : \frac{2(x^2y)^{-3}}{(ab)^{-1}}$
(e) $\left(\frac{2x}{y^2}\right)^{-k} : \left(\frac{x^{-3}}{x^{-2}}\right)^k$ (f) $\frac{b^{2n}}{c^{n-1}} : \left(\frac{a^2}{c^{n+1}} \cdot \frac{b^{3n}}{a^5}\right)$
(g) $\frac{t^{2k}-2t^k}{t^{k-2}-4t^{-k-2}}$ (h)

2.25 Vereinfache:

a) $a^7 \cdot a^3$ b) $\sqrt{5}^4$ c) 13^{-0}

d) $\frac{y^7}{y^4}$ e) $(x^2)^5$ f) $(-2x^2)^3$

g) $\frac{a^3-ab^2}{a-b}$ h) $\frac{21^{100}\cdot 10^{80}}{15^{101}\cdot 35^{70}}$ i) $-2\cdot(-2x)^4$

2.26 Vereinfache bzw. berechne:

a) $\frac{x^3y^4z^5}{x^5y^4z^3}$ b) $a^{m+n} : a^{m-n}$ c) $\frac{a^3b^5-a^5b^3}{ab^2-a^2b}$

d) $8^{n+1} : 2^{3n}$ e) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ f) $\frac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2} : \frac{a-2b}{a+2b}$

g) $(rs-1)(rs+1)$ h) $(a+5b)^2$ i) $(ac-bd)^2$

2.27 Berechne 30 $\text{dm}^2 + 0{,}2\ \text{m}^2 + 130\ \text{cm}^2$

2.28 Vereinfache bzw. berechne:

a) $\frac{6^5\cdot 15^4}{12^6\cdot 10^7}$ b) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[3]{27a^6c^9}$

d) $\sqrt{xy^5}\cdot\sqrt{x^3y}$ e) $\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt[3]{x^5y^2}$ f) $\sqrt[4]{x^5y^7} : \sqrt[4]{xy^3}$

2.29 Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die folgenden Größen?

a) $\sqrt{43}$ b) $\sqrt[3]{43}$ c) $\sqrt[4]{43}$

2.30 Vereinfache:

a) $\frac{1+x}{x^6} - \frac{x^2-1}{x^3} - \frac{1}{x^5}$ b) $\frac{a}{a^2b^2-4b^4} - \frac{4b}{a^3b-4ab^3}$

c) $\frac{3-x^2}{x^n} + \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{3x-2}{x^{n+1}}$ d) $\sqrt[3]{ax^3+bx^3}\cdot\sqrt[3]{(a+b)^2}$

2.31 Vereinfache:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a^5}$ c) $\frac{z^2\sqrt{z}}{z\sqrt[4]{z^3}}$

d) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}}$ e) $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2}$ f) $\sqrt[3]{a^5b}\sqrt[3]{ab^2}$

2.32 Vereinfache:

$$\sqrt{18}+\sqrt{50} = \qquad \sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-6\sqrt[3]{2} =$$

$$2^{1/3}-16^{1/3}+54^{1/3} = \qquad \sqrt{120a}-2\sqrt{270a}-5\sqrt{30a} =$$

2.33 Fasse zusammen.

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2^2}$ c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$

d) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{2}$ e) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$ f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^2}$

g) $\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{b^3}$ h) $\sqrt[3]{b^2} : \sqrt[3]{b^{-1}}$ i) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[4]{x}$

2.34 Vor der Einführung von G8 gab es am Ende von Klasse 10 Zentrale Klassenarbeiten in den Hauptfächern. Die folgenden Aufgaben sind diesen Prüfungen entnommen.

Vereinfache folgende Ausdrücke.

(1997) $\frac{(21^2 \cdot a^3)^5}{(7^5 \cdot a^4)^2}$

(1988) $\left(\frac{x-2y}{y^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{x-y}{xy^2}$

(1988) $(\sqrt{a}+1)(1-\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[4]{a})+a$

(1999) $\frac{6 \cdot (3xy^2)^3}{(9x^2y^3)^2}$

(1999) $\frac{(a^2)^3 \cdot (b^3)^{-2} \cdot (ab)^4}{(ab^2)^{-3} \cdot (a^3)^4 \cdot b^5}$

(2000) $\frac{a^x - a^{x+2}}{a^{x+1} - a^x}$

(2000) $\frac{x^{-5}y^{-3}z^{-7}}{x^{-6}y^{-2}z^{-5}} \cdot \frac{x^8y^{-3}z^{-1}}{x^7yz^{-3}}$

(2001) $\frac{16a^3 - a}{a^2 - 4a^3}$

(2001) $\frac{a^{-5}b^2}{c^{-5}a^3} : \frac{c^4b^3}{ba^8}$

(2002) $\frac{(a^2c)^2}{a^2c^2+bc^2} - \frac{b^2}{a^2+b}$

(2002) $\frac{(a^2c)^2}{a^2c^2+bc^2} - \frac{b^2}{a^2+b}$

(2003) $\left(\frac{b^3}{a^{n-2}} : \frac{b^5}{c^{2n}}\right) : \frac{c^{2n}}{a^{n+3}}$

(2004) $\frac{4^{n+1}+12 \cdot 4^n}{4^{n+2}-4^{n+1}}$

(2005) $\frac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}}$

(2006) $\frac{20 \cdot 5^{n+2}+25 \cdot 5^{n+1}}{(\sqrt[n]{25})^{2n}}$

(2007) $\frac{5^{n+2}+2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n - 5^{n+1}}$

(2007) $\frac{x^{n+3}+x^{n+2}}{x^{2n} \cdot x^{2-n}}$

()

2.35 Löse folgende Gleichungen.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $(x-4)(x^2-6) = 0$

c) $5 \cdot 2^x + 1 = 81$

d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

e) $2x^2 + 2x = 12$

f) $(2x-1)(x^2-4) = 0$

g) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

h) $3x - 2x - 1 = 0$

2.36 Löse folgende Gleichungen.

(a) $x^4 - 3x^2 = 0$

(b) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$

(c) $\sqrt{x} = 16$

(d) $x^4 + 3x^3 - 10x^2 = 0$

(e) $x^5 - \frac{1}{16}x = 0$

(f) $6x^5 - 5x^4 + x^3 = 0$

(g) $4x^4 + 15x^2 - 4 = 0$

(h) $\sqrt{x} = \sqrt{16}$

(i) $(x^3-8)(x^2-16) = 0$

(j) $x^2 - \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}$

(k) $2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$

(l) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

(m) $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

(n) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 2$

2.37 Löse folgende Gleichungen.

(a) $x^3 - 3x = 0$ (b) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$

(c) $10x = 11x$ (d) $x^4 + 3x^3 - 10x^2 = 0$

(e) $x^5 - 16x = 0$ (f) $2x^4 = 162$

2.38 Löse die folgenden Gleichungen:

(a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3$ (b) $\frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{3} = \frac{1}{3}$

(c) $\frac{x-1}{x+1} = 3$ (d) $\frac{x+12}{x+5} = 3x - 4$

(e) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 2$ (f) $\frac{3}{x+1} + \frac{5}{2x-1} = \frac{7}{4}$

2.39 Löse die folgenden Gleichungen:

(a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 3$ (b) $\frac{x-2}{5} + \frac{2x+1}{3} = \frac{1}{3}$

(c) $\frac{x-1}{x+1} = 3$ (d) $\frac{x+5}{x+2} = \frac{2x+3}{4}$

(e) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 2$ (f) $\frac{3}{x} + \frac{5}{2x-1} = 2$

2.40 Löse folgende Gleichungen.

(a) $5 \cdot 2^x = 80$ (b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(c) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ (d) $(3^x - 9)(2^x - 8) = 0$

(e) $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ (f) $(2x^2 - 8)(2^{2x+1} - 32) = 0$

(g) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (h) $15x^3 - 8x^2 + x = 0$

(i) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = -2$ (j) $(x - 17)(x + 18) = 0$

(k) $(x^2 - 4)(x^2 + 16) = 0$ (l) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

2.41 Löse folgende Gleichungen:

(a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ (b) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

(c) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ (d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

(e) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ (f) $x^4 + x^2 - 20 = 0$

(g) $\frac{1}{5}x^4 - \frac{34}{5}x^2 + 45 = 0$ (h) $2^{7x-4} = 17$

(i) $x^2 + 7 = \frac{8}{x^2}$ (j) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 3$

2.42 (ZK 1997) Löse die Gleichung $2^x \cdot 3^{x+1} = \frac{1}{2}$.

2.43 (ZK 1998) Löse die Gleichung $3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0$.