AUFGABEN ZUM AUFSTELLEN VON GERADEN UND EBENEN

FRANZ LEMMERMEYER

Wichtig ist, wenn die Aufgabe korrekt formuliert wird, ob es sich um eine Gleichung *einer* oder *der* Ebene (oder Gerade) handelt. Wenn es *die* Gerade heißt, gibt es nur eine, und die kann man notfalls berechnen. Geht es um *eine* Gerade, so gibt es möglicherweise unendlich viele, und man muss (etwa den Richtungsvektor) wählen – allerdings nicht beliebig; meist sind Bedingungen zu beachten.

(1) Bestimme die Gleichung der Geraden durch $P(-1|2|1)$, welche
   (a) durch $A(2|3|-2)$ geht;
   (b) parallel zur x_1-Achse ist;
   (c) parallel zur x_2-Achse ist;
   (d) parallel zur x_3-Achse ist;
   (e) senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht;
   (f) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht;
   (g) senkrecht auf die x_2x_3-Ebene steht;
   (h) senkrecht auf die Ebene $E: 2x_1 - 3x_3 = 2$ steht.

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, welche die beiden Geraden
   (a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält.
   (b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$ enthält.

(3) Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: 2x_1 - 3x_2 = 2$ liegt, und geben Sie die Gleichung der Geraden h durch $P(1|0|2)$ an, die ebenfalls in E liegt und senkrecht auf g steht.

(4) Gegeben ist die Ebene $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$. Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die

(a) in E liegt und durch $P(4|0|0)$ geht;

(b) echt parallel zu E ist.

(5) Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ echt parallel zur Ebene $x_1 + 2x_2 - 2x_2 = 4$ liegt, und geben Sie die Gleichung der Geraden h durch $P(2|0|0)$ an, die ebenfalls parallel zu E ist und senkrecht auf g steht.

(6) Geben Sie Gleichungen der drei Koordinatenebenen an.

(7) Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, welche die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält und

(a) durch den Punkt $P(1|0|-1)$ geht;

(b) parallel zur x_1-Achse ist;

(c) parallel zur x_2-Achse ist;

(d) parallel zur x_3-Achse ist;

(e) senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht;

(f) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht;

(g) senkrecht auf die x_2x_3-Ebene steht;

(8) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, welche

(a) die x_1-Achse enthält;

(b) parallel zur x_1-Achse ist, diese aber nicht enthält;

(c) echt parallel zur x_1x_2-Ebene ist;

(d) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht;

(e) senkrecht auf $E : 2x_1 - 3x_2 = 4$ steht.

(9) Geben Sie die Gleichungen zweier Ebenen an, welche

(a) die x_1-Achse

(b) die x_2-Achse

(c) die x_3-Achse

(d) die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

als Schnittgerade besitzen.

Lösungen

(1) Bestimme die Gleichung der Geraden durch $P(-1|2|1)$, welche

(a) durch $A(2|3|-2)$ geht: Die Gerade durch A und P ist $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) parallel zur x_1-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) parallel zur x_2-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) parallel zur x_3-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht: Weil die x_3-Achse senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht, ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine solche Gerade.

(f) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(g) senkrecht auf die x_2x_3-Ebene steht: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(h) senkrecht auf die Ebene $E : 2x_1 - 3x_3 = 2$ steht: Als Richtungsvektor nehmen wir den Normalenvektor (Skizze!): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, welche die beiden Geraden

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält.

Offenbar schneiden sich beide Geraden in $P(1|1|1)$. Also ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine solche Ebene.

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ enthält.

Hier sind g und h parallel; einen zweiten Spannvektor zu bekommen wir durch den Vektor, der von dem Spurpunkt von g auf den von h zeigt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene $E : 2x_1 - 3x_2 = 2$ liegt, und geben Sie die Gleichung der Geraden

h durch $P(1|0|2)$ an, die ebenfalls in E liegt und senkrecht auf g steht.

Wir setzen den allgemeinen Punkt $L(1+3t|2t|t)$ in E ein und finden $2(1+3t)-3t=2$, also $2=2$ oder $0=0$. Daher liegt g in der Ebene.

Der Richtungsvektor von h steht senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, weil h in der Ebene liegt, und senkrecht auf den Richtungsvektor von g. Also können wir als Richtungsvektor von h den Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

wählen und haben $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}$.

(4) Gegeben ist die Ebene $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$. Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die

   (a) in E liegt und durch $P(4|0|0)$ geht: damit die Gerade in E liegt, muss der Richtungsvektor senkrecht auf den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ stehen; eine Möglichkeit ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) echt parallel zu E ist: Dazu verschieben wir die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, die in E liegt, aus E heraus; $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(5) Zeigen Sie, dass die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ echt parallel zur Ebene $x_1 + 2x_2 - 2x_2 = 4$ liegt, und geben Sie die Gleichung der Geraden h durch $P(2|0|0)$ an, die ebenfalls parallel zu E ist und senkrecht auf g steht.

Wir setzen den allgemeinen Punkt $L(2+2r|r|2r)$ in E ein und finden $2+2r+2r-2(2r)=4$, also $2=4$. Daher haben Gerade und ebene keinen Schnittpunkt und sind daher echt parallel.

(6) Geben Sie Gleichungen der drei Koordinatenebenen an.

- x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$ oder $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$ oder $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$ oder $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(7) Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, welche die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ enthält und

(a) durch den Punkt $P(1|0|-1)$ geht: hier bastelt man sich aus $Q(1|-1|2)$ und P den zweiten Spannvektor; $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$.

(b) parallel zur x_1-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(c) parallel zur x_2-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

(d) parallel zur x_3-Achse ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(e) senkrecht auf die x_1x_2-Ebene steht: $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$.

(f) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht: $x_1 = 0$ oder $x_3 = 0$.

(g) senkrecht auf die x_2x_3-Ebene steht: $x_2 = 0$ oder $x_3 = 0$.

(8) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, welche

(a) die x_1-Achse enthält: $x_2 = 0$ oder $x_3 = 0$.

(b) parallel zur x_1-Achse ist, diese aber nicht enthält: $x_2 = 1$ oder $x_3 = 1$.

(c) echt parallel zur x_1x_2-Ebene ist: $x_3 = 1$.

(d) senkrecht auf die x_1x_3-Ebene steht: $x_1 = 0$

(e) senkrecht auf $E : 2x_1 - 3x_2 = 4$ steht: $3x_1 + 2x_2 = 0$.

(9) Geben Sie die Gleichungen zweier Ebenen an, welche

(a) die x_1-Achse als Schnittgerade besitzen: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$.

(b) die x_2-Achse als Schnittgerade besitzen: $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$.

(c) die x_3-Achse als Schnittgerade besitzen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

(d) die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Schnittgerade besitzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.