Plenarübung 1

Wiederholung: Funktionentheorie

1.1 Komplexe Kurvenintegrale

Wir haben bisher reelle stetige Funktionen $f : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$ integriert, indem wir das Integral

$$\int_a^b f(t)\ dt$$

einer stetigen Funktion mittels Riemannschen Summen definiert haben. Dabei sagen wir salopp, dass wir von a nach b integrieren. Um den Integralbegriff auf komplexe Funktionen zu erweitern, wollen wir einen anderen Blickwinkel betrachten: Wir interpretieren das Integral

$$\int_a^b f(t)\ dt$$

als Integral der Funktion f über die reelle Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R},\ \gamma(t) = t$. Okay, das ist etwas konstruiert, aber es erlaubt uns, unseren Integrationsbegriff direkt auf stetige Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu erweitern:

Definition 1.1.1 (Komplexes Kurvenintegral) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to U$ eine (stückweise) differenzierbare Kurve. Dann definieren wir das Kurvenintegral von f über γ durch:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\ dt,$$

wobei das „$\cdot$“ für komplexe Multiplikation steht und wir den Integranden in Real- und Imaginärteil aufspalten und dann diese mit unserem bekannten reellen Integralbegriff integrieren.

Darüber hinaus definieren wir die Länge einer Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch

$$l(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(t)|\ dt.$$

Man kann Wege auch verketten und reparametrisieren, siehe Skript.

Unser Ziel ist es, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der uns ein probates Mittel gibt, reelle Integrale stetiger Funktionen zu berechnen, auf komplexe Funktionen zu „verallgemeinern“.

Bemerkung 1.1.2 *Analog zur Definition komplexer Kurvenintegral kann man auch reelle Kurvenintegrale definieren. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert dann, dass diese Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängen, wenn man eine stetige Funktion integriert. Sei dazu $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ (stückweise) differenzierbar und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $\gamma\big([a,b]\big) \subset I$. Ist dann F eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Abbildung $t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)$. Also gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:*

$$\int_\gamma f(x)\ dx = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)\ dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Dies ist der erste Unterschied zum Komplexen:

Beispiel 1.1.3 *(a) Wir betrachten die (offensichtlich stetige) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := \bar{z}$. und die folgenden Wege:*

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(t) := t(1+i),$$
$$\gamma_2 : [0,2] \to \mathbb{C},\ \gamma_2(t) := \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 1 + i(t-1), & t > 1. \end{cases}$$

Beides sind stückweise differenzierbare Wege vom Ursprung zum Punkt $1 + i \in \mathbb{C}$. Naiv würde man erwarten, dass $\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)\ dz$, jedoch ist dies nicht richtig:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_0^1 t(1-i)(1+i)\ dt = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1$$
$$\int_{\gamma_2} f(z)\ dz = \int_0^1 t\ dt + \int_1^2 i\big(1 + i(1-t)\big)\ dt = \frac{1}{2} + i\big(1 + i(1 + \frac{1}{2} - 2)\big) = 1 + i.$$

Die beiden Integrale sind also nicht gleich. Der Grund dafür ist, dass die Funktion f zwar stetig, nicht aber holomorph ist.

(b) Wir betrachten nun die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C},\ g(z) := \frac{1}{z}$. Diese wollen wir über den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$ integrieren:

$$\int_{\gamma} g(z)\ dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i \neq 0.$$

Da der Weg geschlossen ist (Anfangspunkt=Endpunkt), kann diese Funktion auf $\mathbb{C} - \{0\}$ also keine Stammfunktion haben (sonst wäre das Integral $= 0$). Dies liegt an der Beschaffenheit des Definitionsbereichs.

Wir werden sehen, dass eine Funktion holomorph sein muss, um eine Stammfunktion besitzen zu können. Aber nicht alle holomorphen Funktionen besitzen Stammfunktionen, wie man in Teil (b) des obigen Beispiels sieht. Der Definitionsbereich muss dazu eine gewisse Eigenschaft erfüllen. Hinreichend ist zum Beispiel:

Definition 1.1.4 (Sternfötextige Gebiete) *Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißst* sternfötextig, *falls es ein $x \in U$, den Sternmittelpunkt, gibt, sodass für alle $y \in U$ die Verbindungslinie von x nach y ganz in U liegt, d.h. $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0,1] : u = tx + (1-t)y\} \subset U$.*

Die Aussage ist dann:

Proposition 1.1.5 *Ist $U \subset \mathbb{C}$ sternfötextig und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gibt es eine holomorphe Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$ von f, d.h. für jede (stückweise) differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to U$ gilt:*

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Jetzt könnte man meinen, dieses Resultat wäre deutlich schlechter als die reelle Version, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da dieser die Stammfunktion für beliebige stetige Funktionen auf kompakten Intervallen garantiert. Jedoch darf man nicht vergessen, dass die Eigenschaft, eine komplexe Stammfunktion zu besitzen, sehr viel stärker ist als das reelle Pendant. Dies sieht man beispielsweise am

Theorem 1.1.6 (Cauchy Integralfotextel) *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für $z_0 \in U$ und $R > 0$, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt für alle $z \in B_R(z_0)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z}\ dw,$$

wobei $\gamma_R : [0, 2\pi] \to U, \gamma_R(t) := z_0 + Re^{it}$.

Dieser Satz impliziert das

Korollar 1.1.7 (Holomorphe Funktionen sind analytisch) *Seine die Voraussetzungen wie beim vorhergehnden Satz. Dann besitzt f in jedem $z \in B_R(z_0)$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\ dw,$$

die vom Entwicklungspunkt z_0 abhängen. (γ_R wie zuvor)

Das bedeutet, dass nur holomorphe Funktionen eine komplexe Stammfunktion haben können!

1.2 Residuensatz und Anwendungen

Das zweite Resultat der komplexen Integrationstheorie, das viele wichtige Implikationen mit sich bringt ist der Residuensatz. Ihn werden wir am Ende verwenden, um auch reelle Integrale zu berechnen!
Wir rufen uns zur Motivation die Funktion $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ in Erinnerung. Diese Funktion ist auf dem Definitionsbereich holomorph. Der Grenzwert $\lim_{z\to 0} f(z)$ existiert (in $\mathbb{C}$) nicht, jedoch existiert der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} z \cdot f(z) = 1 \in \mathbb{C}$. Wir nennen die Stelle $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1 von f. Allgemein definieren wir:

Definition 1.2.1 (Pole und hebbare Singularitäten) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$ offen. Sei $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Existiert dann der Grenzwert*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^k f(z) \in \mathbb{C}$$

und für ein minimales $k \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle kleineren natürlichen Zahlen existiert dieser Grenzwert nicht), dann nennen wir

1. *z_0 eine hebbare Singularität von f, falls $k = 0$,*

2. *z_0 einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, von f, falls $k > 0$.*

Ist $\{z_1, z_2, ...\} \subset U$ eine endliche oder abzählbare Teilmenge ohne Häufungspunkt von U, dann nennen wir eine Funktion $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph*, falls die Einschränkung $f| : U - \{z_1, z_2, ...\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und alle z_i Pole endlicher Ordnung von $f|$ sind.*

Man kann die Singularitäten auch über Laurentreihen klassifizieren, was wir hier nicht machen wollen und definiert dann das Residuum einer Funktion an einer Singularität als den -1ten Koeffizienten der zugehörigen Laurententwicklung. Für Pole gilt:

Lemma 1.2.2 (Residuen von Polen) *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$ ein Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ einer meromorphen Funktion f auf U, so gilt für das Residuum von f in z_0:*

$$Res_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{k-1}\big((z-z_0)^k f(z)\big).$$

Um nachher einige Integrale zu berechnen, versuchen wir uns am Berechnen einiger Residuen:

Beispiel 1.2.3 *(a) Wir betrachten zuerst die meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} - \{z_1, ..., z_4\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Zuerst bestimmen wir die Pole geometrisch: Die komplexen Nullstellen des Polynoms $z^4 + 1$ sind die vierten Einheitswurzeln der -1. Diese Wurzeln müssen alle auf dem Einheitskreis liegen, d.h. $z_j = e^{it_j}, t_j \in [0, 2\pi)\ \forall j$. Da $z_j^4 = e^{4it_j} = -1 = e^{i\pi}$, suchen wir die Lösungen $t_j \in [0, 2\pi)$, sodass $4t_j = \pi + 2k\pi$, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Das sind $\pi/4, 3/4\pi, 5/4\pi, 7/4\pi$. Also können wir $z^4+1 = \prod j = 0^3(z-e^{\frac{1+2j}{4}i\pi})$ schreiben. Wir haben also vier Pole der Ordnung $k = 1$. Wir berechnen der Einfachheit halber das Residuums der Pole $z_1 = e^{i\pi/4}$ und $z_2 = e^{3/4i\pi}$:*

$$\begin{aligned}
Res_{e^{i\pi/4}} f &= \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{1}{(z-e^{3/4i\pi})(z-e^{5/4i\pi})(z-e^{7/4i\pi})} \\
&= \frac{1}{(e^{1/4\pi i}-e^{3/4\pi i})(e^{1/4\pi i}-e^{5/4\pi i})(e^{1/4\pi i}-e^{7/4\pi i})} = \frac{e^{-3/4\pi i}}{4} = \frac{1}{4}e^{5/4\pi i}, \\
Res_{e^{3/4i\pi}} f &= \lim_{z \to e^{3/4i\pi}} \frac{1}{(z-e^{1/4i\pi})(z-e^{5/4i\pi})(z-e^{7/4i\pi})} \\
&= \frac{1}{(e^{3/4\pi i}-e^{1/4\pi i})(e^{3/4\pi i}-e^{5/4\pi i})(e^{3/4\pi i}-e^{7/4\pi i})} = \frac{e^{-7/4\pi i}}{4i} = \frac{1}{4}e^{7/4\pi i}.
\end{aligned}$$

(b) Die komplexen Nullstellen des komplexen Polynoms $z^2 + 8iz - 1$ findet man einfach durch quadratisches Ergänzen: $z_\pm = (\pm\sqrt{-15} - 4)i$. Wir berechnen das Residuum der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{2}{z^2+8iz-1}$ am Pol z_+, der Ordnung 1 hat:

$$Res_{\sqrt{-15}-4}(f) = \frac{2}{z_+ - z_-} = \frac{1}{\sqrt{-15}}.$$

Bevor wir zwei reelle Integrale berechnen, wiederholen wir den Residuensatz.

Theorem 1.2.4 *Sei f eine meromorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine stückweise differenzierbarer geschlossener Weg, der in mathematisch positiver Richtung nur einmal um sein Inneres herumläuft und keinen der Pole von f trifft. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\text{Pole } z_i \text{ innerhalb } \gamma} Res_{z_i}(f).$$

Und nun zur Anwendung:

Beispiel 1.2.5 *(a) Wir wollen*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\sin\varphi} d\varphi$$

berechnen. Wir können leider nicht so ohne weiteres eine Stammfunktion für den Integranden angeben. Stattdessen schreiben wir $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$ *und ergänzen eine schlaue Eins:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2}{8 - i(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} \underbrace{ie^{-i\varphi}\frac{d}{d\varphi}e^{i\varphi}}_{=1} d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi}) \cdot ie^{i\varphi} d\varphi = \int_{\gamma_1} g(z)\ dz,$$

wobei $g(z) = \frac{2}{z^2+8iz-1}$ *die im obigen Beispiel betrachtete meromorphe Funktion mit Polen* $z_\pm$ *der jeweiligen Ordnung Eins ist und* $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = e^{it}$ *die bereits bekannte Kreiskurve ist (der Ausdruck in der letzten Zeile oben ist das Kurvenintegral von* g *über die Kurve* γ_1*). Die Voraussetzungen des Residuensatzes sind erfüllt: Die Kurve* γ_1 *trifft keine der Pole* $z_\pm$ *von* g *und läuft einmal in mathematisch positiver Richtung um den Pol* z_+*. Der Pol* z_- *liegt nicht innerhalb der Kurve. Also gilt nach dem Residuensatz:*

$$\int_{\gamma_1} g(z)\ dz = 2\pi i Res_{z_+}(g) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{-15}} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$

Dies ist damit der Wert des anfangs betrachteten reellen Integrals.

(b) *Darüber hinaus wollen wir das Integral* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ *berechnen. Hier gehen wir wie folgt vor: Wir hatten gesehen, dass* $f(z) := \frac{1}{1+z^4}$ *eine auf* $\mathbb{C}$ *meromorphe Funktion mit Polen* $\{e^{i\pi/4}, e^{3/4i\pi}, e^{5/4i\pi}, e^{7/4i\pi}\}$ *ist, die jeweils die Ordnung haben. Das zu berechnende Integral ist definiert durch*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Wir werden dieses Integral wie folgt mit dem Residuensatz berechnen: Zuerst definieren wir eine Kurve $\gamma^R : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ *durch:*

$$\gamma^R(t) := \begin{cases} R(1-2t), & t \leq 0 \\ Re^{i\pi t} \end{cases}$$

Dies ist eine stückweise glatte Kurve und für $R > 1$ *liegt keiner der Pole von* f *auf der Kurve. Sie umläuft für diese* R *die Pole* $e^{i\pi/4}, e^{3/4i\pi}$ *einmal in mathematisch positiver Richtung. Also liefert der Residuensatz:*

$$\int_{\gamma^R} f(z)\ dz = 2\pi i\big(Res_{e^{i\pi/4}}(f) + Res_{e^{3/4i\pi}}(f)\big) = \frac{\pi i}{2}(e^{5/4\pi i} + e^{7/4\pi i}) = -\pi\sin(5/4\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Die linke Seite des Integrals ist gegeben als

$$\int_{\gamma^R} f(z)\ dz = \int_{-R}^{R} f(x)\ dx + \int_{\widetilde{\gamma}^R} f(z)\ dz,$$

wobei $\widetilde{\gamma}^R : [0, 1] \to \mathbb{C}, \widetilde{\gamma}^R(t) = Re^{i\pi t}$*. Wir wollen das Kurvenintegral von* f *über die Kurve* $\widetilde{\gamma}^R$ *abschätzen. Dazu bemerken wir, dass aus der Dreiecksungleichung (und umgekehrten Dreiecksungleichung) mit* $R > 1$ *folgt:*

$$R^4 - 1 = |R^4| - 1 = |R^4e^{i\pi t}| - |-1| \leq |R^4e^{i\pi t} - (-1)| = |R^4e^{i\pi t} + 1| \leq |R^4e^{i\pi t}| + 1 = R^4 + 1.$$

Damit können wir abschätzen:

$$\left|\int_{\widetilde{\gamma}^R} f(z)\ dz\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{1}{1+R^4 e^{i\pi t}} \pi i R e^{i\pi t}\right| dt \leq \pi R \int_0^1 \frac{1}{R^4-1} dt = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Also gilt für $R \to \infty$:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma^R} f(z)\ dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$