Vorlesung Topologie

Musterlösungen zum Übungsblatt 2

Aufgabe 1 *Die Topologien einer 3-elementigen Menge* $X := \{a, b, c\}$.

	Subbasis $\mathcal{S}$	*Topologie* $\mathcal{T}$	$\#\mathcal{T}$
1.	$\mathcal{S} = \phi$	$\mathcal{T} = \{\phi, X\}$	2
2.	$\mathcal{S} = \{\{a\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, X\}$	3
3.	$\mathcal{S} = \{\{b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, X\}$	3
4.	$\mathcal{S} = \{\{c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{c\}, X\}$	3
5.	$\mathcal{S} = \{\{a, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a, b\}, X\}$	3
6.	$\mathcal{S} = \{\{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a, c\}, X\}$	3
7.	$\mathcal{S} = \{\{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b, c\}, X\}$	3
8.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, X\}$	4
9.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{a, c\}, X\}$	4
10.	$\mathcal{S} = \{\{c\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{c\}, \{a, b\}, X\}$	4
11.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, X\}$	4
12.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{a, c\}, X\}$	4
13.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{b, a\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{b, a\}, X\}$	4
14.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{b, c\}, X\}$	4
15.	$\mathcal{S} = \{\{c\}, \{c, a\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{c\}, \{c, a\}, X\}$	4
16.	$\mathcal{S} = \{\{c\}, \{c, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{c\}, \{c, b\}, X\}$	4
17.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$	5
18.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{b, a\}, \{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{b, a\}, \{b, c\}, X\}$	5
19.	$\mathcal{S} = \{\{c\}, \{c, a\}, \{c, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{c\}, \{c, a\}, \{c, b\}, X\}$	5
20.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$	5
21.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$	5
22.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$	5
23.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$	6
24.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$	6
25.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$	6
26.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$	6
27.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$	6
28.	$\mathcal{S} = \{\{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$	6
29.	$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$	$\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$	8

Ergebnis: Es finden sich 29 Topologien auf $X = \{a, b, c\}$.

Aufgabe 2 *Gesucht ist eine k+1 elementige Topologie* $\mathcal{T}$ *auf* $X := \{1, 2, \ldots, k\}$.

Die gesuchte Topologie lautet: $\mathcal{T} = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots, \{1,2,\ldots,k\}\}$.

Aufgabe 3 *Sei $X := I\!R$; bilden die Menge aller Intervalle der Form a) $]-\infty, x[$ und b) $]a,b[$ Topologien auf X?*

Zu a): $]-\infty, x[, \; x \in \overline{I\!R}$ bilden eine Topologie auf $I\!R$.

- (O1):
$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}]-\infty, x_\lambda[=]-\infty, S[\text{ wobei } S := \; sup\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \; \in \overline{I\!R}$$
- (O2):
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}]-\infty, x_\lambda[=]-\infty, I[\text{ wobei } I := \; inf\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \; \in \overline{I\!R}$$
- (O3):
$$]-\infty, -\infty[= \phi \;, \quad]-\infty, \infty[= I\!R \;.$$

Zu b): $]a,b[, \; a,b \in \overline{I\!R}$ bilden keine Topologie, weil Vereinigung von solchen nicht von dieser Form sind.

Aufgabe 4 *Sei $f \; : \; X \to Y$.*
a) Zu zeigen: f ist stetig :⇔ $\forall \; A \; \subset \; X$ gilt $f(\overline{A}) \; \subset \overline{f(A)}$
b) Finde und beweise analoges Kriterium zu a), bei dem $\bar{A}$ durch Åersetzt wird.

Mengentheoretische Überlegungen zu Aufgabe 4:
(1) $f^{-1}fA \supset A$
(2) $f^{-1}B \supset A \;\Leftrightarrow\; B \supset fA$

Zu (1) $x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \in fA \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}fA$.
Echt gleich bei X=Y=Punkt;
$\#Y = 1$, $\#X > 1$: Für $A := \{x_0\}$ ist $f^{-1}fA = X \;\neq A$.

Zu (2)
"$\Rightarrow$ ":
$$fA \underbrace{\subset}_{Voraussetzung} ff^{-1}B \subset B.$$

"$\Leftarrow$ ":
$B \supset fA$ nach Voraussetzung.
$$f^{-1}B \supset f^{-1}fA \underbrace{\supset}_{(1)} A.$$

Zu 4.a) “$\Rightarrow$ ”:
$\overline{fA}$ abgeschlossen
$f^{-1}\overline{fA}$ abgeschlossen, da f stetig
$f^{-1}\overline{fA} \ \supset \ f^{-1}fA \ \supset \ A$
$f^{-1}\overline{fA} \ \supset \ \overline{A}$
$\overline{fA} \ \supset \ f(\overline{A})$.

“$\Leftarrow$ ”:
Sei $C \ \subset \ Y$ abgeschlossen.
Zu zeigen: $f^{-1}C$ abgeschlossen.
Zu zeigen: $\overline{f^{-1}C} = f^{-1}C$.

“$\supset$ ”:
$\overline{f^{-1}C} \ \supset \ f^{-1}C$; vgl. Eigenschaft $\overline{A} \ \supset \ A$.

“$\subset$ ”:
$f(\overline{f^{-1}C}) \ \subset \overline{ff^{-1}C} \ \subset \overline{C}$
Nach Voraussetzung (C abgeschlossen) gilt: $\overline{C} = C$.
$\overline{f^{-1}C} \ \subset f^{-1}\overline{C} = f^{-1}C$.

Zu 4.b):
Behauptung: f ist stetig :$\Leftrightarrow$ $\forall \ A \ \subset \ X$ gilt $f(A^\circ) \ \supset (fA)^\circ$.

“$\Rightarrow$ ”:
$(fA)^\circ$ offen
$f^{-1}(fA)^\circ$ offen, da f stetig
$f^{-1}(fA)^\circ \ \subset \ f^{-1}fA \ \subset \ A$
$f^{-1}(fA)^\circ \ \subset \ A^\circ$
$(fA)^\circ \ \subset \ fA^\circ$.

“$\Leftarrow$ ”:
Sei $C \ \subset \ Y$ offen.
Zu zeigen: $f^{-1}C$ offen.
Zu zeigen: $f^{-1}C = (f^{-1}C)^\circ$.

“$\supset$ ”:
$f^{-1}C \ \supset \ (f^{-1}C)^\circ$.Folgt aus der Eigenschaft $A \ \supset \ A^\circ$.

“$\subset$ ”:
$f(f^{-1}C)^\circ \quad \underbrace{\supset}_{Voraussetzung} \quad (ff^{-1}C)^\circ \ \supset C^\circ = C$.

Also: $(f^{-1}C)^{\circ} \supset f^{-1}C$.

Aufgabe 5 *Zu zeigen: Für jede Menge X gibt es keine Surjektion*

$$f : X \to \mathcal{P}\mathcal{X}$$

.

Behauptung: $A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$ ist nicht im Bild von f.

Angenommen $A \in$ Bild f. D.h. $\exists\, b \in X : f(b) = A$.
Dann gilt:
(1) $b \in A$ oder (2) $b \notin A$
Beide Fälle sind widersprüchlich!

Zu (1):
$b \in A\ ,\ b \in f(b) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{nach\ Def.\ von\ A} \quad b \notin A$

Zu (2):
$b \notin A\ ,\ b \notin f(b) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{nach\ Def.\ von\ A} \quad b \in A$