Prof. Dr. O. Venjakob Dr. Th. Bouganis

Iwasawa Theorie

Seminar SS 2012

Ort: INF288 HS 1 **Zeit:** Do 14.00-16.00 Uhr **s.t.** **Beginn:** 19.04.2012

Inhalt: Sei K ein Zahlkörper und bezeichne mit O_K den Ganzheitsring von K. Allgemein ist O_K kein faktorieller Ring, d.h. die nicht-trivialen Elemente von O_K besitzen keine eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren. Um abzumessen, wie entfernt O_K davon ist, ein faktorieller Ring zu sein, führt man den Begriff der Idealklassengruppe ein. Diese ist als die Faktorgruppe der gebrochenen Ideale von O_K modulo der Untergruppe der gebrochenen Hauptideale definiert. Die Ordnung der Idealklassengruppe nennt man Klassenzahl.

Ein interessanter Fall tritt mit $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ auf, wobei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzeln und p eine Primzahl ist. Es war Kummer, der erkannte, dass die p-Torsion der Idealklassengruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ ein Hindernis für einen Beweis der Fermatschen Vermutung darstellt. In der Tat war ihm der folgende Satz bekannt (siehe [Wa] seite 1),

Satz: Sei p eine ungerade Primzahl, die nicht die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ teilt. Dann hat die Gleichung $x^p + y^p = z^p$ mit $(xyz, p) = 1$ keine Lösung für $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Iwasawas bahnbrechende Idee war es, diese Torsion mit Mittel von der unendlichen Galois-Theorie zu untersuchen. Damit begründete er die Iwasawatheorie, eine Theorie die sich mit der Bestimmung der (p-Torsion von) Idealklassengruppen von unendlichen Körpertürmen befasst, deren Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_p$, den p-adischen Zahlen, ist. Als klassisches Beispiel betrachte man den Körperturm

$$\mathbb{Q}(\zeta_p) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^2}) \subset \ldots \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \subset \ldots,$$

wobei ζ_{p^n} eine primitive p^n-te Einheitswurzel ist. Die sogenannte Hauptvermutung der Iwasawa-Theorie (jetzt ein Satz dank der Arbeit von Barry Mazur und Andrew Wiles) liefert eine Methode um die Klassenzahlen solcher unendlicher Erweiterungen durch spezielle Werte der Riemannschen Zetafunktion zu studieren.

In diesem Seminar werden wir die sogennante p-adische Zetafunktion konstruieren. Dafür werden wir zuerst die Coleman-Abbildung definieren, danach den Struktursatz von Iwasawa-Moduln beweisen und schließlich die Haupvermutung formulieren.

Im Sommer (von July 30 bis August 3) findet in Heidelberg die Iwasawa 2012 Konferenz statt. Die Woche davor wird es einen Vorbereitungskurs geben. Das Seminar bietet die Möglichkeit, sich hinreichendes Grundwissen anzueignen, um an den Vorbereitungkurs teilzunehmen. Details kann man unten http://www.mathi.uni-heidelberg.de/ iwasawa2012/ finden.

Im Laufe des Seminars sollen folgende Themen behandelt werden:

1. Einführung in die Iwasawa Theorie (Bouganis),
2. Der Ring $\mathbb{Z}_p[[T]]$, der Weierstraß-Vorbereitungsatz; [Wa] s. 113-117,
3. Norm und Spur, der Satz von Coleman; [CS] s.14-20,
4. Die Logarithmsche Ableitung (Beweis vom Satz 2.4.6 nur skizzieren); [CS] s. 20-28,
5. Spezielle Werte der Riemannschen Zetafunktion und die logarithmsche Ableitung; [CS] s. 28-31, [Wa] 30-33,
6. Die Iwasawa-Algebra, p-adische Maße, der Satz von Mahler (ohne Beweis), Einschräkung von Maßen,; [CS] s. 33-40,
7. Die fundamentale exakte Sequenz und das Bild von δ_k; [CS] s. 41-48,
8. Die p-adische Zetafunktion, die zyklotomsche Einheiten und der Satz von Iwasawa; [CS] s. 49-54,
9. Der Struktursatz von endlich erzeugt torsion $\mathbb{Z}_p[[T]]$- Moduln; [NSW] s. 222-227, s. 243-246
10. Einführung in die Klassenkörpertheorie; [Wa] 396-405,
11. $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen und maximale abelsche unverzweigte p-Erweiterungen; [Wa] 265-268 ($K = \mathbb{Q}$), 278-281,
12. Die Formulierung der Hauptvermutung von Iwasawa.

Anmeldung: *ab sofort,* bei Thanasis Bouganis (Zi. 221, INF 288, email: bouganis@mathi.uni-heidelberg.de)

Literatur:

[CS] J. Coates and R. Sujatha, *Cyclotomic Fields and Zeta Values,* Springer-Verlag 2006,

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields,* Grundlehren der mathematischen Wissenschften, Vol 33, Springer 2000,

[W] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields,* Graduate Texts in Mathematics 83, 2nd ed., Springer-Verlag 1997

Vorkenntnisse: Algebra I