Prof. Otmar Venjakob
Benjamin Kupferer

Seminar

Lubin-Tate (φ, Γ)-Moduln

Sommersemester 2017

Ort: SR 5 INF 205 **Zeit:** mittwochs, 9:30 Uhr **Beginn:** 19.04.17

Inhalt

Dieses Seminar soll als Einführung in die Theorie der Lubin-Tate (φ, Γ)-Moduln dienen.
Sei p eine Primzahl und L eine endliche Erweiterung des Körpers der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ sowie $\mathcal{O}_L$ der Ganzheitsring von L. Ein zentrales Problem der algebraischen Zahlentheorie ist es, die absolute Galoisgruppe $G_L := \mathrm{Gal}(\overline{L}|L)$ zu verstehen. Die Philosophie Langlands ist es, ein Verständnis der Gruppe über ihre Darstellungen aufzubauen. Wir werden uns auf die Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}_L$-Moduln, die eine stetige, lineare Operation der Gruppe G_L besitzen, konzentrieren. Im Folgenden sei diese Kategorie mit $\mathbf{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G_L)$ bezeichnet. Eine Methode, um eine Kategorie zu verstehen, ist es, eine Äquivalenz zu einer anderen Kategorie anzugeben, in welcher zumindest einige Aspekte einfacher beschrieben werden können, indem man sich Techniken der p-adischen Analysis zu nutze macht. Wir werden in diesem Seminar zeigen, dass die Kategorie $\mathbf{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G_L)$ äquivalent zur Kategorie sogenannter étaler Lubin-Tate (φ_L, Γ_L)-Moduln ist. Diese ist ebenfalls eine Kategorie von Moduln über einem Ring zusammen mit einer stetigen, linearen Operation einer Gruppe Γ_L sowie einem zusätzlichem Operator φ_L. Die Idee dabei ist die folgende:
Während $\mathcal{O}_L$ ein vergleichsweiser einfacher Ring ist, ist die Gruppe G_L doch sehr kompliziert. In dieser neuen Kategorie wird der Koeffizientenring komplizierter sein (und dessen Konstruktion wird auch einige Zeit in Anspruch nehmen), dafür ist aber die Gruppe von einer einfacheren Struktur, nämlich $\Gamma_L \cong \mathbb{Z}_p^d$.
Die Theorie der (φ_L, Γ_L)-Moduln hat viele Anwendungen, unter anderem lässt sich zu einer Darstellung $V \in \mathbf{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G_L)$ mit Hilfe dieser ein vergleichsweise einfacher Komplex bilden, mit welchem sich die Galoiskohomologie der Darstellung berechnen lässt.
Das Seminar richtet sich nach [Sch16] und lässt sich in drei Abschnitte gliedern:
Im ersten Abschnitt werden wir die Theorie behandeln, die benötigt wird, um Lubin-Tate (φ, Γ)-Moduln zu definieren. Im zweiten Abschnitt werden diese dann eingeführt und im dritten Abschnitt wird die oben angesprochene Kategorienäquivalenz gezeigt.

Vorkenntnisse

Algebra I, lokale Körper

Vorbesprechung

Eine Vorbesprechung mit Vortragsvergabe findet am Mittwoch, den 08.02.17, um 14 Uhr c.t. in Seminarraum 4 INF 205 statt.

Kontakt

Benjamin Kupferer
INF 205 Raum 03.303
bkupferer@mathi.uni-heidelberg.de
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bkupferer`

Literatur

[Sch16] Peter Schneider. *Galois representations and (φ, Γ)-modules.* Lecture notes, Münster - `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/phi-Gamma-modules-1.pdf`, 2016.

Vortragsliste
Sämtliche Angaben beziehen sich auf [Sch16].

1. Verzweigte Wittvektoren I (S. 6-13) - 19.04.17
1.1 - 1.1.14: *Definition verzweigter Wittvektoren, Eigenschaften, Beschreibung als projektiver Limes*

2. Verzweigte Wittvektoren II (S. 13-20) - 26.04.17
1.1.15-1.1.26: *Wittvektoren über perfekten Ringen/Körpern, Zusammenhang verzweigte Wittvektoren mit klassischen (unverzweigten) Wittvektoren*

3. Unverzweigte Erweiterungen & Lubin-Tate formale Gruppen (S. 21-29) - 03.05.17
1.2 - 1.3.12: *Eigenschaften unverzweigter Erweiterungen, Existenz von Lubin-Tate Gruppen, Diskussion der zugehörigen Erweiterung der Torsionspunkte (der Beginn soll zügig behandelt werden; klassisches Beispiel mit Einheitswurzeln einbinden)*

4. Tilts und Normenkörper I (S. 34-44) - 10.05.17
1.4 - 1.4.17: *Perfektoide Körper, Definition des Tilts, der Tilt von* $\mathbb{C}_p$

5. Tilts und Normenkörper II (S. 44-53) - 17.05.17
1.4.18 - 1.4.29: *Wittvektoren und Tilts, Normenkörper*

6. Schwache Topologie auf Wittvektoren & Der Isomorphismus zwischen H_L und H_{E_L} (S. 53-61) - 24.05.17
Abschnitt 1.5 und Abschnitt 1.6: *Definition der schwachen Topologie, Nachweis der Hausdorffsch-Eigenschaft und Vollständigkeit, Isomorphie zwischen* H_L *und* H_{E_L}

7. Ein zweidimensionaler lokaler Körper (S. 61-68) - 31.05.17
Abschnitt 1.7: *Definition des Ringes* $\mathcal{A}_L$*, Beschreibung der Operation von* Γ_L *und des Endomorphismus* φ_L*, Nachweis der Stetigkeit der Operation von* Γ_L *und von* φ_L *bezüglich der schwachenTopologie (hat man auch Stetigkeit für die starke Topologie?)*

8. Der Koeffizientenring (S. 69-81) - 07.06.17
Abschnitt 2.1: *Definition und Eigenschaften*

9. Die Moduln (S.81-88) - 14.06.17
Abschnitt 2.2, mindestens eines der Beispiele aus Abschnitt 2.3: *Definition von* (φ_L, Γ_L)*-Moduln, Stetigkeit des* φ_L*-linearen Endomorphismus, Beispiel aus 2.3*

10. Die Funktoren (S.91-101) - 21.06.17
Abschnitt 3.1: *Darstellungen der absoluten Galoisgruppe* G_L*, Definition der Funktoren, Wohldefiniertheit*

11. Koeffizienten von Charakteristik p (S. 101-106) - 28.06.17
Abschnitt 3.2: *Beweis der Kategorienäquivalenz unter der Annahme, dass die jeweiligen Moduln* π_L*-Torsionsmoduln sind*

12. Der Hauptsatz (S. 106-111) - 05.07.17
Abschnitt 3.3: *Beweis der Kategorienäquivalenz im allgemeinen Fall*