Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 12
Abgabetermin: Freitag, 15.07.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2+2 Punkte)**
Sei $\mathbb{H}$ eine Hilbertebene und $A, B, C \in \mathbf{P}$ sowie $A', B', C' \in \mathbf{P}$ jeweils drei Punkte in allgemeiner Lage. Beweisen oder Widerlegen Sie:

(a) Gilt $\measuredangle ABC \simeq \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle BAC \simeq \measuredangle B'A'C'$ sowie $\measuredangle BCA \simeq \measuredangle B'C'A'$, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

(b) Gilt $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\measuredangle ABC \simeq \measuredangle A'B'C'$, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent.

(c) Sei $\measuredangle BAC$ ein rechter Winkel. Dann sind die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle ACB$ keine rechten Winkel.

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**
Sei $\mathbb{H}$ eine Hilbertebene und seien $A \neq B \in P$ zwei verschiedene Punkte. Sei weiterhin $M \in P$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, m_{AB} die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ und sei $P \in m_{AB} \backslash \{M\}$.
Zeigen Sie, dass die Punkte A, M, P sowie B, M, P in allgemeiner Lage sind und dass die Dreiecke $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$ kongruent sind.

Aufgabe 3. **(2+2+1+1+1+1+2 Punkte)**
Man betrachte die Anschauungsebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$, $M \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^2 \backslash \{M\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Punkt $\sigma_{r,M}(A) \in \overrightarrow{MA} \backslash \{M\}$ gibt, mit

$$\|M - A\| \cdot \|M - \sigma_{r,M}(A)\| = r^2.$$

Man definiert dann die Abbildung $\sigma_{r,M} \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{M\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{M\},\ P \mapsto \sigma_{r,M}(P)$ und nennt sie auch **Inversion** am Kreis $K_r(M) = \{P \in \mathbb{R}^2 |\ \|M - P\| = r\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma_{r,M} \circ \sigma_{r,M} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \backslash \{M\}}$ gilt.
Im folgenden werden gängige Notationen aus der Analysis benutzt und zwar $B_r(M) = \{P \in \mathbb{R}^2 |\ \|M - P\| < r\}$ sowie $\overline{B_r(M)}^{\mathrm{c}} = \{P \in \mathbb{R}^2 |\ \|M - P\| > r\}$.

(c) Sei $A \in B_r(M) \backslash \{M\}$. Zeigen Sie $\sigma_{r,M}(A) \in \overline{B_r(M)}^{\mathrm{c}}$.

(d) Sei $A \in \overline{B_r(M)}^{\mathrm{c}}$. Zeigen Sie $\sigma_{r,M}(A) \in B_r(M) \backslash \{M\}$.

(e) Sei $A \in K_r(M)$. Zeigen Sie $\sigma_{r,M}(A) = A$.

(f) Sei $g := M \vee A$, $h \neq g$ eine zu g parallele Gerade und $P := l_g A \wedge h$ der Schnittpunkt von h mit dem Lot auf g durch A. Zeigen Sie, dass die Punkte M, A, P in allgemeiner Lage sind, sowie dass die Punkte $\sigma_{r,M}(A), A, P$ in allgemeiner Lage sind, falls $A \notin K_r(M)$ gilt.

(g) Sei die Notation wie in Teilaufgabe (f) und $A \notin K_r(M)$. Zeigen Sie, dass die Dreiecke $\triangle MAP$ und $\triangle \sigma_{r,M}(A)AP$ nicht kongruent sind.