Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 11
Abgabetermin: Freitag, 08.07.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+6 Punkte)**
Sei $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid X^t X = E_2\}$ (dabei ist E_2 die 2×2 Einheitsmatrix), $A \in \mathbb{R}^2$ und bezeichne $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass

$$\langle Mv, Mw \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt.
Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; P \mapsto M \cdot P + A$$

eine Bewegung der Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2. **(3+2+3 Punkte)**
Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ bezeichne (v, w) die reelle 2×2-Matrix, deren erste Spalte aus den Einträgen von v und deren zweite Spalte aus den Einträgen von w besteht.

(a) Seien $g, h \in \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ zwei nicht parallele Geraden und $A \neq B \in g$ sowie $C \neq D \in h$. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von g und h die folgende Gleichung erfüllt:

$$g \wedge h = \frac{1}{\det(B - A, D - C)} (\det(C, D)(B - A) - \det(A, B)(D - C)).$$

Dabei bezeichnet det die Determinante der jeweiligen Matrix.
(*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass $B - A$ und $D - C$ linear unabhängig sind und schreiben Sie $g \wedge h = x(B - A) + y(D - C)$. Überlegen Sie sich dann, dass ein Punkt P genau dann auf g liegt, wenn $\det(P, B - A) = \det(A, B)$ gilt.)

(b) Für drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ sei nun

$$[A, B, C] := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $[A, B, C] = \det(A, B) + \det(B, C) - \det(A, C)$ gilt.

(c) Beweisen Sie das drei-Punkte-Kriterium:
$A, B, C \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann kollinear, wenn $[A, B, C] = 0$ gilt.