Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 10
Abgabetermin: Freitag, 01.07.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2+2 Punkte)**
Sei $\mathbb{H}$ eine Hilbertebene. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{W}$ mit $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$. Dann gilt $\alpha < \beta$ genau dann, wenn $\alpha' < \beta'$ gilt.

(b) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{W}$ mit $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$. Dann gilt $\alpha < \gamma$.

(c) Für zwei Winkel $\alpha, \beta \in \mathbf{W}$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen:

$$\alpha < \beta, \ \alpha \simeq \beta, \ \alpha > \beta.$$

Aufgabe 2. **(2+2+2 Punkte)**
In dieser Aufgabe soll das Axiom (K_4) für $\mathbb{R}^2$ gezeigt werden. Es bezeichne $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt und $\| \ \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Die Notation in dieser Aufgabe richtet sich nach dem Skript.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \measuredangle \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} &\longrightarrow [0, \pi] \\ (v, w) &\longmapsto \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}\right) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist.
Für $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ in allgemeiner Lage definiert man dann

$$\measuredangle ABC := \measuredangle(A - B, C - B).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\measuredangle ABC$ wohldefiniert ist, d.h. zeigen Sie für $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und $A', B', C' \in \mathbb{R}^2$, die jeweils in allgemeiner Lage sind, mit $\angle ABC = \angle A'B'C'$, dass auch $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ gilt.
Sind A, B, C sowie $A', B', C' \in \mathbb{R}^2$ jeweils drei Punkte in allgemeiner Lage, so definiert man

$$\angle ABC \simeq \angle A'B'C' :\Longleftrightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\simeq$ auf der Menge der Winkel $\mathbf{W}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3. **(2+2+2+2 Punkte)**
Das Ziel dieser Aufgabe ist es ein Beispiel einer Ebene zu geben, die zwar unendlich viele Punkte enthält, jedoch nicht isomorph zur Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist. Man kann sogar zeigen, dass die hier eingeführte Ebene eine Hilbertebene ist.
Sei $\mathbf{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y > 0\}$ die Punktemenge und sei $\mathbf{P}_1 := \{(x, 0) | \ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die x-Achse. Für $A \in \mathbf{P}_1$ definiere man

$$g_A := \{A + t(0, 1) | \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Für $A = (a, 0) \in \mathbf{P}_1$ und $r \in \mathbb{R}_+$ definiere man

$$h_{A,r} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - a)^2 + y^2 = r^2, \ y > 0\}.$$

(a) Seien $A \in \mathbf{P}_1$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass $g_A \subseteq \mathbf{P}$ und $h_{A,r} \subseteq \mathbf{P}$ gilt.
Man definiere dann $\mathbf{G}_1 := \{g_A |\ A \in \mathbf{P}_1\}$ und $\mathbf{G}_2 := \{h_{A,r} |\ A \in \mathbf{P}_1,\ r \in \mathbb{R}_+\}$ und setze $\mathbf{G} := \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$. Die Geradenmenge besteht also aus Halbgeraden und Halbkreisen die senkrecht auf der x-Achse stehen.

(b) Seien $A \neq B \in \mathbf{P}_1$ und $r \neq s \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass der Schnitt von $h_{A,r}$ mit g_B und der Schnitt von $h_{A,r}$ mit $h_{B,s}$ jeweils höchstens einen Punkt in $\mathbf{P}$ enthält.

(c) Seien $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbf{P}$ mit $a_1 \neq b_1$. Zeigen Sie, dass es $M \in \mathbf{P}_1$ und $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $A, B \in h_{M,r}$ gilt. Folgern Sie, dass $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine Inzidenzebene ist.

(d) Man betrachte nun den Punkt $(0, 0) \in \mathbf{P}_1$ und die Gerade $h_{(0,0),1} \in \mathbf{G}_2$ sowie den Punkt $(3, 4) \in \mathbf{P}$. Finden Sie ein $r \in \mathbb{R}_+$, sodass $(3, 4) \in h_{(0,0),r}$ gilt. Finden Sie darüber hinaus ein $A \in \mathbf{P}_1$, sodass $(3, 4) \in g_A$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass die Ebene $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ als Inzidenzebene nicht isomorph zur Standardebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sein kann.