Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 09
Abgabetermin: Freitag, 24.06.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(1+1+2+1+1+1+2 Punkte)**
Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star, \cong)$ eine angeordnete Inzidenzebene, die die Kongruenzaxiome für Strecken erfüllt. Für $A \neq B \in \mathbf{P}$ definiere man die **Äquivalenzklasse der Strecke** $\overline{AB}$ unter $\cong$ durch

$$[\overline{AB}] := \{\overline{CD} |\ \overline{CD} \cong \overline{AB}\}.$$

Sei weiterhin

$$\mathbb{S} := \{[\overline{AB}] |\ A \neq B \in \mathbf{P}\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von Strecken. Im Folgenden werden die Elemente von $\mathbb{S}$ mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

(a) Seien $A \neq B \in P$. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $\mathbb{S} \to \overrightarrow{AB} \backslash \{A\}$ gibt.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{S}$. Zeigen Sie, dass es $A, B, C \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$ gibt, sodass $a = [\overline{AB}]$ und $b = [\overline{BC}]$ gilt.
Dies führt zu folgender Definition:
Seien $a, b \in \mathbb{S}$ und $A, B, C \in \mathbf{P}$ wie oben, dann definiere man eine Verknüpfung „+" auf $\mathbb{S}$ durch:
$$a + b := [\overline{AC}].$$

(c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung „+" wohldefiniert ist, d.h. zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{S}$ und $A, B, C, A', B', C' \in \mathbf{P}$ mit $A \star B \star C$ bzw. $A' \star B' \star C'$ und $a = [\overline{AB}]$, $b = [\overline{BC}]$ bzw. $a = [\overline{A'B'}]$, $b = [\overline{B'C'}]$, dass $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass „+" assoziativ ist.

(e) Zeigen Sie, dass „+" kommutativ ist.

(f) Entscheiden Sie, ob $(\mathbb{S}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(g) Geben Sie im Fall $\mathbf{P} = \mathbb{R}^2$ eine unter Addition abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. für $x, y \in M$ ist auch $x + y \in M$), für die es eine additive Bijektion $\varphi \colon \mathbb{S} \to M$ gibt, an. Geben Sie die Bijektion φ ebenfalls konkret an und begründen Sie ihre Antwort kurz.

Aufgabe 2. **(6 Punkte)**
Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \star)$ eine angeordnete Inzidenzebene und seien $A, B, C \in \mathbf{P}$ sowie $A', B', C' \in \mathbf{P}$ je drei Punkte in allgemeiner Lage. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

(ii) $A = A'$ und entweder $\left(B' \in \overrightarrow{AB} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AC}\right)$ oder $\left(B' \in \overrightarrow{AC} \text{ und } C' \in \overrightarrow{AB}\right)$.