Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 08

Abgabetermin: Freitag, 17.06.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2+2+2 Punkte)**

Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine angeordnete Inzidenzebene. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbf{P}$ heißt **konvex** falls für alle $A \neq B \in S$ auch die komplette Strecke $\overline{AB}$ in S enthalten ist.
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$, $\| \ \|$ die euklidische Norm und $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x-a\| < r\}$ die offene Kreisfläche um a mit Radius r in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $B_r(a)$ eine konvexe Menge.

(b) Ist $(S_i)_{i \in I}$ mit $S_i \subseteq \mathbf{P}$ für alle $i \in I$ eine Familie konvexer Mengen, so ist auch $\bigcap_{i \in I} S_i$ eine konvexe Menge.

(c) Sind $S, T \subseteq \mathbf{P}$ konvexe Mengen, so ist auch $S \cup T \subseteq \mathbf{P}$ eine konvexe Menge.

(d) Für eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ sind die begrenzten Halbebenen $S_1(g)$ und $S_2(g)$ konvex.

Aufgabe 2. **(2+2+2+2 Punkte)**

Es sei $\star$ die in der Vorlesung definierte Anordnung auf $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (vgl. Definition 3.21 des Skriptums). Für $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ gelte $A \Diamond B \Diamond C$ per Definition genau dann, wenn die Punkte A, B, C paarweise verschieden sind, die Menge $\{A, B, C\}$ kollinear ist und mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a_1 < b_1 < c_1, \quad a_2 < b_2 < c_2, \quad a_1 > b_1 > c_1, \quad a_2 > b_2 > c_2.$$

(a) Seien $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $A \Diamond B \Diamond C$, die $a_1 < b_1 < c_1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass dann entweder $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ oder $a_2 > b_2 > c_2$ gilt. Gilt $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ und sind zwei der Zahlen a_2, b_2 und c_2 verschieden, so sind a_2, b_2 und c_2 paarweise verschieden und es gilt $a_2 < b_2 < c_2$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Diamond$ eine wohldefinierte Relation ist, d.h. zeigen Sie für Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, die $A \Diamond B \Diamond C$ erfüllen, dass weder $A \Diamond C \Diamond B$ noch $B \Diamond A \Diamond C$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathbb{R}^2, \mathbf{G}_{\mathbb{R}}, \Diamond)$ die Anordnungsaxiome $(A_1) - (A_4)$ erfüllt.

(d) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $A \Diamond B \Diamond C$ genau dann gilt, wenn $A \star B \star C$ gilt.