Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 06
Abgabetermin: Freitag, 03.06.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(6 Punkte)**
Dualisieren Sie die Axiome (P_1) - (P_4) für projektive Ebenen. Vergleichen Sie die dualisierten Axiome mit den ursprünglichen und erklären Sie, dass ein Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, bestehend aus einer Menge $\mathbf{P}$ und einer Teilmenge der Potenzmenge $\mathbf{G} \subseteq \operatorname{Pot}(\mathbf{P})$, welches diese dualisierten Axiome erfüllt, auch die Axiome (P_1) - (P_4) erfüllt.

Aufgabe 2. **(3+3 Punkte)**
Seien $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$, $\mathbb{P}_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{G}_1)$ und $\mathbb{P}_2 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2)$ projektive Ebenen sowie $\mathbb{P}^* = (\mathbf{G}, \mathbf{P}^*)$, $\mathbb{P}_1^* = (\mathbf{G}_1, \mathbf{P}_1^*)$ und $\mathbb{P}_2^* = (\mathbf{G}_2, \mathbf{P}_2^*)$ die zugehörigen dualen projektiven Ebenen.

(a) Sei $f\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ ein projektiver Isomorphismus. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Isomorphismus $f^*\colon \mathbb{P}_1^* \to \mathbb{P}_2^*$ mit $f(g) = f^*(g)$ für alle $g \in \mathbf{G}_1$ induziert.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{P}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^*),\ f \mapsto f^*$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 3. **(2+2+2 Punkte)**
Sei

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ \|x\| = 1\}$$

die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$ bezüglich der euklidischen Norm.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbf{P}}_{\mathbb{R}},\ x \mapsto \mathbb{R} \cdot x$$

surjektiv ist.

(b) Bestimmen Sie für $A \in \overline{\mathbf{P}}_{\mathbb{R}}$ das Urbild $\pi^{-1}(A)$ und fertigen Sie eine Skizze von $\pi^{-1}(\mathbb{R} \cdot (1,0,0))$ an.

(c) Beschreiben Sie das Urbild einer Geraden aus $\overline{\mathbf{G}}_{\mathbb{R}}$ bezüglich π und skizzieren Sie das Urbild der Geraden $\{\mathbb{R}(\lambda \cdot (1,0,0) + \mu \cdot (0,1,0)) |\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}$ bezüglich π.