# Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

**Blatt 05**
Abgabetermin: Freitag, 27.05.16, 9.00 Uhr

---

**Aufgabe 1.** **(6 Punkte)**
Dualisieren Sie die Axiome $(P_1)$ - $(P_4)$ für projektive Ebenen. Vergleichen Sie die dualisierten Axiome mit den ursprünglichen und erklären Sie, dass ein Paar $(\mathbf{P}, \mathbf{G})$, bestehend aus einer Menge $\mathbf{P}$ und einer Teilmenge der Potenzmenge $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{P})$, welches diese dualisierten Axiome erfüllt, auch die Axiome $(P_1)$ - $(P_4)$ erfüllt.

**Aufgabe 2.** **(3+3 Punkte)**
Seien $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$, $\mathbb{P}_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{G}_1)$ und $\mathbb{P}_2 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{G}_2)$ projektive Ebenen sowie $\mathbb{P}^* = (\mathbf{G}, \mathbf{P}^*)$, $\mathbb{P}_1^* = (\mathbf{G}_1, \mathbf{P}_1^*)$ und $\mathbb{P}_2^* = (\mathbf{G}_2, \mathbf{P}_2^*)$ die zugehörigen dualen projektiven Ebenen.

(a) Sei $f\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ ein projektiver Isomorphismus. Zeigen Sie, dass $f$ einen eindeutigen Isomorphismus $f^*\colon \mathbb{P}_1^* \to \mathbb{P}_2^*$ mit $f(g) = f^*(g)$ für alle $g \in \mathbf{G}_1$ induziert.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^*),\ f \mapsto f^*$$
ein Isomorphismus von Gruppen ist.

**Aufgabe 3.** **(2+2+2 Punkte)**
Im Folgenden bezeichne $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$
Nach Vorlesung sind die Abbildungen
$$\gamma\colon \begin{cases} \overline{\mathbf{P}}_{\mathbb{R}} & \to \{\text{zweidimensionale Untervektorräume von } \mathbb{R}^3\} \\ P = \mathbb{R}\cdot \hat{P} & \mapsto U_P := \ker(\hat{P}) = \{\hat{Q} \in \mathbb{R}^3 | \langle \hat{P}, \hat{Q}\rangle = 0\} \end{cases}$$
und
$$\Gamma\colon \begin{cases} \overline{\mathbf{P}}_{\mathbb{R}} & \to \overline{\mathbf{G}}_{\mathbb{R}} \\ P = \mathbb{R}\cdot \hat{P} & \mapsto g_P := \{\text{eindimensionale Untervektorräume von } U_P\} \end{cases}$$
bijektiv.

(a) Sei $P = \mathbb{R} \cdot \widehat{(1,1,0)}$. Bestimmen Sie $U_P$ konkret und zeichnen sie $P$ und $U_P$ in eine Skizze ein.

(b) Sei nun der zweidimensionale Untervektorraum $U = \mathrm{lin}((1,2,0),(0,0,1))$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Finden Sie ein $\hat{P} \in \mathbb{R}^3$, sodass $U = U_P$ für $P = \mathbb{R}\cdot\hat{P}$ gilt.

(c) Seien $P = \mathbb{R}\cdot\widehat{(1,1,1)}$ und $Q = \mathbb{R}\cdot\widehat{(0,1,2)}$ gegeben. Bestimmen Sie $\Gamma(g_p \wedge g_Q)$ und zeichnen Sie $P$, $Q$ und $\Gamma(g_p \wedge g_Q)$ in eine Skizze.