Übungen zur Einführung in die Geometrie

Sommersemester 2016

Universität Heidelberg
Andreas Ott
Benjamin Kupferer

Blatt 04
Abgabetermin: Freitag, 20.05.16, 9.00 Uhr

Aufgabe 1. **(2+2 Punkte)**
Es sei $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3) = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ gegeben.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{G}$ an und bestimmen Sie deren Mächtigkeit. Fertigen Sie darüber hinaus eine Skizze von $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ an.

(b) Geben Sie die Mengen $\overline{\mathbf{P}}$ und $\overline{\mathbf{G}}$ des projektiven Abschlusses $\overline{\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)}$ von $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ an und bestimmen Sie deren Mächtigkeit. Fertigen Sie darüber hinaus eine Skizze von $\overline{\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)}$ an.

Aufgabe 2. **(2+2+2 Punkte)**

(a) Seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$ affine Ebenen und sei $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ ein affiner Isomorphismus. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Isomorphismus $\overline{f}\colon \overline{\mathbb{A}} \to \overline{\mathbb{A}'}$ zwischen den projektiven Abschlüssen induziert.

(b) Seien $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ und $\mathbb{P}' = (\mathbf{P}', \mathbf{G}')$ projektive Ebenen, $g \in \mathbf{G}$ und $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ ein projektiver Isomorphismus. Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Isomorphismus $f_g\colon \mathbb{P}_g \to \mathbb{P}'_{f(g)}$ induziert.

(c) Sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene. Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}$ isomorph zu $\overline{\mathbb{A}}_{[G]}$ ist.

Aufgabe 3. **(2+1+2+1,5+1,5 Punkte)**
Sei $\mathbb{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{G})$ eine projektive Ebene und $g \in \mathbf{G}$ eine Gerade. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass $\mathbb{P}$ isomorph zu $\overline{\mathbb{P}_g}$ ist. Für eine Gerade $h \in \mathbf{G}$ sei $h_g := h \cap \mathbf{P}_g$.

(a) Seien $h, k \in \mathbf{G}\backslash\{g\}$ mit $h \neq k$. Zeigen Sie, dass h_g und k_g genau dann parallel sind, wenn es ein $A \in g$ gibt mit $h \cap k = \{A\}$.

(b) Sei $A \in \mathbf{P}$. Zeigen Sie, dass es eine Gerade $l \in \mathbf{G}\backslash\{g\}$ mit $A \in l$ gibt.
Im Folgenden wird mit $l^{(A)}$ eine solche Gerade bezeichnet.

(c) Folgern Sie aus Teilaufgabe (a), dass die Abbildung

$$\psi\colon g \to [\mathbf{G}_g],\ A \mapsto [l_g^{(A)}]$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

(d) Folgern Sie aus Teilaufgabe (c), dass die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbf{P} \to \overline{\mathbf{P}_g},\ \begin{cases} A & \mapsto A, \text{ falls } A \in \mathbf{P}\backslash g \\ A & \mapsto [l_g^{(A)}], \text{ falls } A \in g \end{cases}$$

bijektiv ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\Psi(h) \in \overline{\mathbf{G}_g}$ für $h \in \mathbf{G}$ gilt und folgern Sie, dass Ψ ein projektiver Isomorphismus ist.